Matematičke metode u fizici

BILJEŠKE S VJEŽBI

Kompleksna analiza. Obične diferencijalne jednadžbe. Fourierova analiza. Parcijalne diferencijalne jednadžbe. Specijalne funkcije. Varijacijski račun.

© 2014. Sanjin Benić i Ivica Smolić

radna verzija 2014 | lipanj | 3

Ovo je radna, nedovršena verzija bilješki s vježbi iz kolegija Matematičke metode fizike s 2. godine istraživačkog smjera fizike.

Sadržaj

1 Kompleksna analiza **5**
- 1.1 Skup kompleksnih brojeva . . . 5
- 1.2 Kompleksna ravnina . . . 9
- 1.3 Krivulje u kompleksnoj ravnini . . . 13
- 1.4 Osnovne funkcije kompleksne varijable . . . 15
- 1.5 Riemannove plohe . . . 22
- 1.6 Nizovi i redovi kompleksnih brojeva . . . 31
- 1.7 Neprekidnost i diferencijabilnost 37
- 1.8 Taylorov i Laurentov razvoj . . . 42
- 1.9 Integriranje kompleksnih funkcija . . . 51

2 Obične diferencijalne jednadžbe **85**
- 2.1 Općenite karakteristike . . . 85
- 2.2 Diferencijalne jednadžbe prvog reda . . . 87
- 2.3 Linearne diferencijalne jednadžbe višeg reda . . . 97

3 Fourierova analiza **117**
- 3.1 Skup kvadratno integrabilnih funkcija . . . 117
- 3.2 Fourierov red . . . 120
- 3.3 Fourierov transformat . . . 125
- 3.4 Delta funkcija . . . 129
- 3.5 Greenova funkcija za obične diferencijalne jednadžbe . . . 141

4 Parcijalne diferencijalne jednadžbe **149**
- 4.1 Opća klasifikacija . . . 149
- 4.2 Semilinearne PDJ prvog reda . . . 153
- 4.3 Problemi u jednoj prostornoj dimenziji . . . 156
- 4.4 Problemi u dvije prostorne dimenzije . . . 161
- 4.5 Kontinuirani sustavi . . . 167

5 Specijalne funkcije **175**
- 5.1 Legendreovi polinomi . . . 175
- 5.2 Kugline funkcije . . . 183
- 5.3 Besselove funkcije . . . 187

6 Varijacijski račun **197**
- 6.1 Račun bez ograničenja . . . 197
- 6.2 Lagrangeovi multiplikatori . . . 198

Poglavlje 1

Kompleksna analiza

§ 1.1 Skup kompleksnih brojeva

Polje kompleksnih brojeva $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ definirano je kao skup $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, Kartezijev produkt dva skupa realnih brojeva, sačinjen od uređenih parova realnih brojeva (x, y), uz sljedeće operacije,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \equiv (x_1 + x_2,\, y_1 + y_2) \qquad \text{(zbrajanje)} \qquad (1.1)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \equiv (x_1 x_2 - y_1 y_2,\, x_1 y_2 + x_2 y_1) \qquad \text{(množenje)} \qquad (1.2)$$

Neutralni element s obzirom na zbrajanje ("nula") je $(0, 0)$, a neutralni element s obzirom na množenje ("jedinica") je $(1, 0)$. Za skup kompleksnih brojeva bez nule upotrebljavamo oznaku $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ (ponekad se ovaj skup označava s $\mathbb{C}^*$). Aditivni i multiplikativni inverzi kompleksnog broja $z = (x, y)$ dani su redom s

$$-z = (-x, -y) \qquad (1.3)$$

za sve $z \in \mathbb{C}$, te

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\,,\, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \qquad (1.4)$$

za sve $z \in \mathbb{C}^\times$. Valja uočiti kako su kompleksni brojevi oblika $(x, 0)$ s gore uvedenim operacijama izomorfni s poljem realnih brojeva. Stoga obično nulu $(0, 0)$ pišemo jednostavno kao realni broj 0, a jedinicu $(1, 0)$ kao realni broj 1. Nadalje, kako vrijedi

$$(x, y) = (1, 0) \cdot (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0)$$

uobičajeno je kompleksne brojeve $z = (x, y)$ pisati u obliku $z = x + iy$, gdje je izostavljeno eksplicitno pisanje jedinice 1, a uvedena je **imaginarna jedinica** $i \equiv (0, 1)$. Na ovaj način je identitet $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$ preveden u izraz

$$i^2 = -1 \qquad (1.5)$$

Ovdje vidimo originalnu motivaciju uvođenja imaginarne jedinice: ona je korijen jednadžbe $z^2 + 1 = 0$.
Svaki kompleksni broj $z = x + iy$ ima svoj **realni dio** $\mathrm{Re}(z) = x$ i **imaginarni dio** $\mathrm{Im}(z) = y$. U starijim knjigama su u upotrebi nešto drugačije oznake, $\Re z$ za realni dio i $\Im z$ za imaginarni dio kompleksnog broja z. ako je $\mathrm{Re}(z) = 0$ i $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ kažemo da je z *čisto imaginaran*. Dva kompleksna broja z_1 i z_2 su jednaki ako i samo ako su im jednaki realni i imaginarni dio,

$$z_1 = z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \ \wedge \ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$$

Nanovo, osnovne operacije među kompleksnim brojevima u ovom zapisu sada glase,

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm y_1) + i(y_1 \pm y_2) \tag{1.6}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{1.7}$$

Omjer kompleksnih brojeva z_1 i $z_2 \neq 0$ računamo prema

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + i \left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

Primjetimo, razlomak je proširen tako da u nazivniku dobijemo realan broj, a potom smo razdvojili realni i imaginarni dio u brojniku. Prilikom potenciranja, odnosno uzastopnog množenja kompleksnih brojeva valja imati na umu da za sve $k \in \mathbb{Z}$ vrijede sljedeće jednakosti

$$i^{4k+1} = i \ , \quad i^{4k+2} = -1 \ , \quad i^{4k+3} = -i \ , \quad i^{4k} = 1 \tag{1.8}$$

Primjer 1.1. Izračunajte zbroj, razliku, umnožak i omjer sljedeća dva kompleksna broja, $z_1 = 3 + 2i$ i $z_2 = 2 - 3i$.

R. Imamo redom

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (3 + 2) + (2 - 3)i = 5 - i \\ z_1 - z_2 &= (3 - 2) + (2 - (-3))i = 1 + 5i \\ z_1 \cdot z_2 &= (3 \cdot 2 - 2 \cdot (-3)) + (3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2)i = 12 - 5i \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + 2i}{2 - 3i} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{(6 - 6) + (9 + 4)i}{4 + 9} = i \end{aligned}$$

Primjer 1.2. Izračunajte $(1 + i\sqrt{3})^{3n}$ za sve $n \in \mathbb{Z}$.

R. Upotrebom binomnog poučka imamo

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^3 &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot i\sqrt{3} + 3 \cdot 1 \cdot (i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3 = \\ &= 1 + 3i\sqrt{3} - 9 - 3i\sqrt{3} = -8 \ . \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$(1 + i\sqrt{3})^{3n} = (-8)^n = (-1)^n \, 2^{3n}$$

za sve $n \in \mathbb{Z}$. Dakako, $(1 + i\sqrt{3})^0 = 1$.

Za svaki kompleksni broj $z = x + iy$ definiramo **kompleksnu konjugaciju**,

$$z^* \equiv x - iy \tag{1.9}$$

Ovo je idempotentna operacija, $(z^*)^* = z$, koja zadovoljava sljedeća svojstva

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^* \ , \quad (z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^* \ , \quad (z^{-1})^* = (z^*)^{-1} \tag{1.10}$$

Ponekad se upotrebljava i alternativna oznaka, $\bar{z} = z^*$. Pomoću kompleksne konjugacije možemo zapisati realni i imaginarni dio kompleksnog broja,

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\,(z + z^*) \ , \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}\,(z - z^*) \tag{1.11}$$

Svakom kompleksnom broju z pridružujemo i **modul** (**apsolutnu vrijednost**) $|z|$, nenegativan realni broj definiran preko

$$|z| \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.12}$$

Nula je jedini kompleksni broj isčezavajućeg modula. Modul kompleksnog broja zadovoljava sljedeća svojstva:

$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 z_2| \ , \quad |z^{-1}| = |z|^{-1} \tag{1.13}$$

$$|z^*| = |z| \ , \quad z^* \cdot z = |z|^2 \tag{1.14}$$

Primjer 1.3. Dokažite da za kompleksne brojeve $z, w \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

R. ako želimo izbjeći eksplicitno raspisivanje strana jednakosti pomoću realnih i imaginarnih dijelova brojeva z i w, možemo se poslužiti nekim svojstvima modula i kompleksne konjugacije kompleksnog broja. Prvo valja uočiti da vrijedi

$$|z + w|^2 = (z + w)(z + w)^* = (z + w)(z^* + w^*) =$$

$$= zz^* + zw^* + wz^* + ww^* = |z|^2 + zw^* + wz^* + |w|^2$$

Na sličan način imamo

$$|z - w|^2 = |z|^2 - zw^* - wz^* + |w|^2$$

Zbrajanjem ova dva rezultata slijedi tražena tvrdnja.

1.1 ♣ ZADACI

1. Pronađite realne i imaginarne dijelove narednih kompleksnih brojeva:

$$\text{a) } \frac{1+i}{1-i}\,, \;, \quad \text{b) } \frac{(1+i)(2-i)}{(1-i)(3+i)}\,, \;, \quad \text{c) } \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}\;, \quad d) \; \frac{(1+i)^{101}}{(1-i)^{99}}\;.$$

2. Dokažite jednakosti

   a) $|1-z_1^* z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$,
   b) $|1+z_1^* z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)$.

3. Kada vrijedi jednakost $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$?

4. Dokažite identitet

$$(n-1\mp 1)\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 \pm \Big|\sum_{j=1}^{n} z_j\Big|^2 = \sum_{1\le k<l\le n}|z_k \pm z_l|^2$$

5. Pokažite da je kompleksni broj

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2}$$

   realan ako su $|z_1| = |z_2| = 1$, te $z_1 z_2 \neq -1$.

6. Dokažite svojstva (1.10) koja zadovoljava operacija kompleksne konjugacije!

7. Dokažite da su z_1 i z_2 kompleksno konjugirani brojevi ako i samo ako su $z_1 + z_2$ i $z_1 z_2$ realni brojevi.

8. Ako za kompleksne brojeve a, b, c vrijedi $|a| = |b| = |c| = r$, dokažite da je

$$\left|\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right| = r$$

9. Pokažite da je

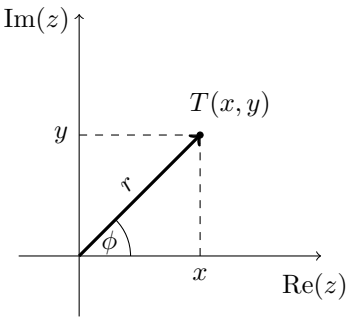
$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0$$

   ako i samo ako je $|z| = 1$ (uz pretpostavku da je $z \neq -1$, kako bi izraz uopće imao smisla).

10. Neka je C skup svih matrica oblika

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

    gdje su $x, y \in \mathbb{R}$. Pokažite da skup C, zajedno s uobičajenim operacijama zbrajanja i množenja matrica zadovoljava istu algebru kao i kompleksni brojevi. Koja matrica odgovara imaginarnoj jedinici? Kojim matričnim operacijama na skupu C odgovara operacija kompleksne konjugacije i modul kompleksnog broja?



Slika 1.1: Koordinate proizvoljne točke $T(x, y)$ u kompleksnoj ravnini, u kartezijevim i polarnim koordinatama.

§ 1.2 Kompleksna ravnina

Iz same definicije jasno je kako postoji prirodna korespodencija između skupa kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ i točaka u ravnini: svakom kompleksnom broju $z = x+iy$ možemo jednoznačno pridružiti točku $T(x, y)$, vidi sliku 1.1. Ravninu u kojoj je svakoj točki pridružen odgovarajući kompleksni broj zovemo **kompleksna ravnina**[1]. Radi jednostavnijeg izražavanja često se rabi fraza *u točki* z ili čak samo *u* z u značenju "u točki (kompleksne ravnine) pridruženoj kompleksnom broju z".

Promotrimo čemu odgovaraju dosad uvedeni pojmovi u ovakvom geometrijskom prikazu kompleksnih brojeva. Očigledno, $\mathrm{Re}(z)$ jednak je apscisi, a $\mathrm{Im}(z)$ ordinati točke T. U skladu s tim obično os apscisa zovemo **realna os**, a os ordinata **imaginarna os**. Apsolutna vrijednost kompleksnog broja $|z|$ jednaka je udaljenosti odgovarajuće točke T od ishodišta kompleksne ravnine. Općenito, udaljenost točaka T_1 i T_2, pridruženih brojevima z_1 i z_2, jednaka je

$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \;=\; |z_1 - z_2| \tag{1.15}$$

ako je kompleksnom broju z pridružena točka $T(x, y)$, tada je kompleksno konjugiranom broju z^* pridružena točka $T'(x, -y)$, nastala refleksijom na realnoj osi. Nadalje, kako svakoj točki $T(x, y)$ odgovara radijus-vektor $\overrightarrow{OT}$, zbroju kompleksnih brojeva $z_1 + z_2$ pridružen je zbroj radijus-vektora $\overrightarrow{OT_1} + \overrightarrow{OT_2}$.

Primjer 1.4. Zadana su tri vrha paralelograma, z_1, z_2 i z_3. Pronađite četvrti vrh z_4 koji leži nasuprot vrhu z_2.

R. Označimo točke pridružene kompleksnim brojevima z_1, z_2 i z_3 redom s A, B i C. Kako je posrijedi paralelogram, znamo da je četvrti vrh D definiran jednadžbom

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

[1] U literaturi nailazimo na niz različitih naziva ove ravnine koji se vezuju uz imena matematičara, među kojima su Caspar Wessel (1745.-1818.), Jean-Robert Argand (1768.-1822.) i Johann Carl Friedrich Gauss (1777.-1855.), a čiji su radovi doprinjeli razvoju ideje smještanja kompleksnih brojeva u ravninu. Mi ćemo upotrebljavati povijesno neutralan naziv.

Prevedeno u jezik kompleksnih brojeva imamo

$$z_4 = z_1 + z_3 - z_2$$

Svaka dva kompleksna broja $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zadovoljavaju tzv. **nejednakost trokuta**

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{1.16}$$

Naziv ove nejednakosti je očigledno povezan s geometrijskim nejednakostima koje vrijede među stranicama trokuta: zbroj dvije stranice je uvijek veći od treće stranice, a razlika dvije stranice uvijek manja od treće stranice. ako je $z_1 \neq z_2$, sve veličine u gornjim nejednakostima su strogo pozitivne, pa možemo pisati recipročnu verziju nejednakosti trokuta,

$$\frac{1}{\big||z_1| - |z_2|\big|} \geq \frac{1}{|z_1 \pm z_2|} \geq \frac{1}{|z_1| + |z_2|} \tag{1.17}$$

Kompleksnu ravninu možemo promatrati i u polarnim koordinatama (r, ϕ), kao na slici 1.1, koje su povezane s Kartezijevim koordinatama (x, y) preko

$$x = r\cos\phi \ , \quad y = r\sin\phi$$

Odavde slijedi zapis kompleksnog broja u polarnim koordinatama,

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \tag{1.18}$$

Radijus r jednak je apsolutnoj vrijednosti kompleksnog broja,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \tag{1.19}$$

a polarni kut ϕ određen je (do na višekratnik broja 2π) sustavom jednadžbi

$$\cos\phi = \frac{x}{r} \ , \quad \sin\phi = \frac{y}{r} \tag{1.20}$$

Kut ϕ zovemo **argument** kompleksnog broja z i pišemo $\mathrm{Arg}(z) = \phi$. Specijalno, za slučaj kompleksnog broja $z = 0$ imamo $r = 0$, dok je njegov argument nedefiniran. Obično se uvodi restrikcija argumenta na interval duljine 2π, u kom slučaju govorimo o **glavnoj vrijednosti argumenta** i pišemo $\arg(z)$. Odabir intervala glavne vrijednosti argumenta ovisi o problemu kojeg rješavamo (ovo će biti ilustrirano nizom primjera s primjenom integracije kompleksnih funkcija). Na primjer, ako definiramo

$$-\pi < \arg(z) \leq \pi$$

tada je

$$\arg(1) = 0 \ , \quad \arg(i) = \frac{\pi}{2} \ , \quad \arg(-1) = \pi \ , \quad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \ , \quad \text{itd.}$$

Općenito, imamo vezu

$$\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.21}$$

Množenjem dva kompleksna broja njihove apsolutne vrijednosti se množe, a argumenti zbrajaju, u što se možemo jednostavno uvjeriti:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \cdot r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) = \\ &= r_1 r_2 \left(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)\right) \end{aligned}$$

Nadalje, za multiplikativan inverz kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}^\times$ imamo

$$z^{-1} = \frac{1}{r(\cos\phi + i\sin\phi)} = \frac{\cos\phi - i\sin\phi}{r(\cos^2\phi + \sin^2\phi)} = \frac{1}{r}\left(\cos\phi - i\sin\phi\right)$$

Ova zapažanja moguće je sažeti u obliku sljedećih jednakosti

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = r_1 r_2 \ , \quad \mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2) \tag{1.22}$$

$$|z^{-1}| = |z|^{-1} = r^{-1} \ , \quad \mathrm{Arg}(z^{-1}) = -\mathrm{Arg}(z) \tag{1.23}$$

gdje su svi kompleksni brojevi u gornjim jednakostima različiti od 0. Odavde indukcijom slijedi

$$|z^n| = |z|^n \ , \quad \mathrm{Arg}(z^n) = n\mathrm{Arg}(z) \tag{1.24}$$

za sve $n \in \mathbb{Z}$.

Primjer 1.5. Zadana su tri kompleksna broja, $a, b, c \in \mathbb{C}^\times$, takvi da je $|a| > 1$, $|b| < 1$ te $|c| = 1$. Na koji način se ovi kompleksni brojevi "pomiču" u kompleksnoj ravnini prilikom potenciranja?

R. Kompleksni brojevi jediničnog modula ($|z| = 1$) čine jedničnu kružnicu $\mathcal{C}$ sa središtem u ishodištu kompleksne ravnine. Jedan od takvih brojeva je c (on leži *na* kružnici $\mathcal{C}$). S druge strane, kompleksni broj a nalazi se *izvan* kružnice $\mathcal{C}$ (jer je njegova udaljenost od ishodišta veća od 1), a kompleksni broj b *unutar* kružnice $\mathcal{C}$ (jer je njegova udaljenost od ishodišta manja od 1). Prilikom potenciranja s pozitivnim eksponentom $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, imamo slijedeći efekt

$$|a^n| = |a|^n > |a| > 1 \ , \quad |b^n| = |b|^n < |b| < 1 \ , \quad |c^n| = |c|^n = 1$$

Drugim riječima, prilikom potenciranja ovi kompleksni brojevi ostaju u istom položaju spram kružnice $\mathcal{C}$ (a^n izvan, b^n unutar, a c^n na kružnici $\mathcal{C}$), s tim da se a^n udaljava, a b^n približava ishodištu kako n raste. Nadalje,

$$\mathrm{Arg}(a^n) = n\,\mathrm{Arg}(a) \ , \quad \mathrm{Arg}(b^n) = n\,\mathrm{Arg}(b) \ , \quad \mathrm{Arg}(c^n) = n\,\mathrm{Arg}(c)$$

Dakle, sva tri broja prilikom potenciranja vrše *rotaciju* u *pozitivnom* smjeru oko ishodišta kompleksne ravnine.

ako je potencija negativna, $n \in \mathbb{Z}$, $n < -1$, imamo sličan rezultat. I u ovom slučaju ovi kompleksni brojevi ostaju u istom položaju spram kružnice $\mathcal{C}$, ali sada se a^n približava, a b^n udaljava od ishodišta kako apsolutna vrijednost potencije n raste. Također, rotacija mijenja orjentaciju i u ovom slučaju je u negativnom smjeru.

Teorem 1.1. (De Moivré) *Za svaki realni broj $\phi \in \mathbb{R}$ i svaki cijeli broj $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi sljedeća jednakost*

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi) \tag{1.25}$$

Dokaz : Za kompleksni broj $z = \cos\phi + i\sin\phi$ imamo $|z| = 1$ i $\mathrm{Arg}(z) = \phi + 2k\pi$, uz $k \in \mathbb{Z}$. De Moivréov teorem odmah slijedi iz jednakosti (1.24). □

Primjer 1.6. Zadana je točka $z \in \mathbb{C}$. Razmatramo translaciju u kompleksnoj ravnini zadanu nekim drugim kompleksnim brojem w (podsjećamo, svakom kompleksnom broju jednoznačno je pridružen radijus–vektor, stoga i vektor translacije) i rotaciju zadanu kutom θ, oko točke $z_0 \neq 0$. Koja točke su rezultat translacije i rotacije zadane točke z?

R. Prilikom translacije rezultantna točka dobije se jednostavno zbrajanjem,

$$z' = z + w \ .$$

Nadalje, pretpostavimo da želimo našu točku z zarotirati za kut θ oko ishodišta kompleksne ravnine. Odgovor je ovog puta

$$z' = z\,(\cos\theta + i\sin\theta) \ ,$$

jer je ovako definirana točka jednako udaljena od ishodišta, $|z'| = |z|$, te ima argument uvećan za kut θ, $\mathrm{Arg}(z') = \mathrm{Arg}(z) + \theta$. Konačno ako želimo zarotirati točku z oko točke z_0 za kut θ, možemo iskombinirati upravo izložene operacije. Prvo translatiramo obje točke za $-z_0$ (tako da točka oko koje rotiramo dođe u ishodište), zatim izvršimo rotaciju za kut θ i na kraju sve vratimo natrag opet translacijom za z_0; rezultat je

$$z' = (z - z_0)(\cos\theta + i\sin\theta) + z_0 \ .$$

1.2 ♣ ZADACI

1. Zadan je trokut u kompleksnoj ravnini s vrhovima u $a, b, c \in \mathbb{C}$. Zapišite unutrašnje kutove ovog trokuta pomoću funkcije arg, a potom provjerite da je njihov zbroj jednak π!

2. Jim Hawkins pronašao je staru kartu zakopanog blaga s uputama: "Na otoku X postoje vješala Γ i dva stabla, hrast $\mathcal{H}$ i bor $\mathcal{B}$. Prvo izbroji korake od Γ do $\mathcal{H}$, okreni se za pravi kut na *desno*, pa izbroji jednak broj koraka u tom smjeru i potom označi mjesto prvim kolcem. Zatim izbroji korake od Γ do $\mathcal{B}$, okreni se za pravi kut na *lijevo*, izbroji jednak broj koraka u tom smjeru i onda označi mjesto drugim kolcem. Na pola puta između ta dva kolca nalazi se zakopano blago!" Problem je, međutim, što su u međuvremenu vješala Γ istrunula, pa više nije jednostavno pratiti upute s karte. Smještanjem otoka X u kompleksnu ravninu pronađite položaj zakopanog blaga! (zadatak preuzet iz [Gam88])

3. Dokažite sljedeću tvrdnju: ako tri kompleksna broja z_1, z_2, z_3 jediničnog modula, $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ zadovoljavaju jednadžbu $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, tada oni čine tri vrha jednakostraničnog trokuta upisanog u jediničnu kružnicu.

4. Pod kojim uvjetima su tri različite točke z_1, z_2 i z_3 kolinearne (odnosno, leže na jednom pravcu)?

5. Pokažite da nejednakost $|z-1| < |z+1|$ ekvivalentna nejednadžbi $\mathrm{Re}(z) > 0$. Rješite zadatak i grafičkim putem!

6. Prikažite $\cos(5\theta)$ pomoću potencija funkcije $\cos\theta$, odnosno $\sin(5\theta)$, preko potencija funkcije $\sin\theta$.

7. Koristeći De Moivréov teorem dokažite da vrijedi

$$\left(\frac{1+i\mathrm{tg}\,\phi}{1-i\mathrm{tg}\,\phi}\right)^n = \frac{1+i\mathrm{tg}\,(n\phi)}{1-i\mathrm{tg}\,(n\phi)}\ .$$

§ 1.3 Krivulje u kompleksnoj ravnini

Pravci

Pravac je moguće zadati na nekoliko različitih načina. Pretpostavimo da želimo provući pravac kroz dvije različite točke $a, b \in \mathbb{C}$. Tada je za svaku točku z tog pravca, različitu od a i b, kut koji zatvaraju a, b i z, s vrhom u z, jednak 0 ili π. Sinus ovog kuta je, dakle, uvijek nula, što je moguće elegantno zapisati u sljedećem obliku

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{a-b}\right) = 0 \tag{1.26}$$

ako je pravac definiran kao simetrala dužine zadane točkama z_1 i z_2, tada imamo zapis

$$|z-z_1| = |z-z_2| \tag{1.27}$$

Drugim riječima, simetrala se sastoji od točaka z jednako udaljenih od zadanih točaka z_1 i z_2. Konačno, pravac u kompleksnoj ravnini moguće je zapisati i pomoću 2 parametra, kompleksnog broja $c \in \mathbb{C}$ i realnog broja $p \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Re}(cz) = p \tag{1.28}$$

Naime, pretpostavimo li da je $c = \alpha + i\beta$, gornja jednadžba odgovara implicitnom obliku jednadžbe pravca u analitičkoj geometriji,

$$\alpha x - \beta y = p$$

Čunjosječnice

Tri klasične krivulje, elipsu, hiperbolu i parabolu, možemo zapisati upotrebom njihove geometrijske definicije. Elipsu (hiperbolu) sačinjavaju točke z čiji je zbroj (razlika) udaljenosti od dvije zadane točke z_1 i z_2 (*fokusa*) u kompleksnoj

ravnini konstantan. Parabolu sačinjavaju točke z čija je udaljenost od zadane točke z_0 (*fokusa*) u kompleksnoj ravnini jednak zbroju apscise točke z i realne pozitivne konstante.

Elipsa s fokusima u z_1 i z_2 i velikom poluosi a,

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a \tag{1.29}$$

Specijalno, kružnica radijusa r sa središtem u točki z_0,

$$|z - z_0| = r \tag{1.30}$$

Hiperbola s fokusima u z_1 i z_2 i velikom poluosi a,

$$\big||z - z_1| - |z - z_2|\big| = 2a \tag{1.31}$$

Parabola s fokusom u z_0 i realnim pozitivnim parametrom $p > 0$,

$$|z - z_0| = \frac{p}{2} + \mathrm{Re}(z) \tag{1.32}$$

Upotrebom nejednakosti možemo definirati unutrašnjost elipse bez ruba,

$$|z - z_1| + |z - z_2| < 2a \tag{1.33}$$

kao i unutrašnjost elipse s rubom

$$|z - z_1| + |z - z_2| \leq 2a \tag{1.34}$$

1.3 ♣ ZADACI

1. Odredite skup točaka zadan jednadžbom $|z - i| = |z + i|$. Zadatak rješite analitičkim i grafičkim putem.
2. Pronađite male poluosi elipse i hiperbole opisanih jednadžbama (1.29) i (1.31).
3. Zadan je kružni vijenac sa središtem u z_0 i radijusima $a > b > 0$. Na koji način ćete zapisati ovaj skup točaka u kompleksnoj ravnini?
4. Koje skupove točaka definira zamjena znaka jednakosti u (1.31) i (1.32) sa znakom nejednakosti?
5. Zadane su dvije točke z_1 i z_2 u kompleksnoj ravnini i realna konstanta $-\pi < \theta \leq \pi$. Koji skup točaka opisuje jednadžba
$$\arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \theta \ ?$$
6. Pretpostavimo da je u kompleksnoj ravnini zadana krivulja γ jednadžbom $f(z) = 0$. Na koji način zapišemo jednadžbu krivulje γ' koja je dobivena iz γ rotacijom (u pozitivnom smjeru) za kut θ oko ishodišta?

§ 1.4 Osnovne funkcije kompleksne varijable

Neka je $S \subset \mathbb{C}$ podskup kompleksnih brojeva i $f : S \to \mathbb{C}$ zadano preslikavanje. Kažemo da je f funkcija kompleksne varijable. Funkciju kompleksne varijable uvijek možemo rastaviti na njen realni, $u(x, y)$, i imaginarni dio, $v(x, y)$,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1.35}$$

pri čemu podrazumijevamo da su $u, v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije dvije realne varijable.

Polinomi

Polinom n-tog stupnja je preslikavanje $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definirano s

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{1.36}$$

gdje su kompleksni koeficijenti $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, takvi da je $a_n \neq 0$. Općenito polinom n-tog stupnja posjeduje n nul-točaka, međutim, neke od njih mogu biti međusobno jednake.

Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definirana je s

$$\exp(z) \;\equiv\; e^x(\cos y + i \sin y) \tag{1.37}$$

Ponekad eksponencijanu funkciju zapisujemo i s $e^z = \exp(z)$. Kako su funkcije $\cos y$ i $\sin y$ periodične s osnovnim periodom 2π, slijedi da je eksponencijalna funkcija na kompleksnoj domeni periodična s osnovnim periodom $2\pi i$,

$$e^{z+2\pi i} = e^z \tag{1.38}$$

Nadalje, valja uočiti kako vrijedi

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = e^{z_1+z_2} \end{aligned} \tag{1.39}$$

Eksponencijalna funkcija nema nul-točaka,

$$e^z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^x = 0 \quad \text{i/ili} \;\; \cos y + i \sin y = 1$$

Ne postoje brojevi $x, y \in \mathbb{R}$ koji rješavaju gornje jednadžbe.

Tradicionalno se izraz za eksponencijalnu funkciju čisto imaginarnih brojeva zove **Eulerova formula**,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{1.40}$$

a specijalni slučaj dobiven za $x = \pi$ **Eulerov identitet**,

$$e^{\pi i} + 1 = 0 \tag{1.41}$$

Ovaj potonji je posebno zanimljiv jer objedinjuje 5 važnih matematičkih konstanti, 0, 1, i, π, te e.

Eksponencijalna funkcija nam omogućuje da kompleksne brojeve $z \in \mathbb{C}^\times$ zapišemo u tzv. **polarnom obliku**,

$$z = r\, e^{i\phi} \ . \tag{1.42}$$

Uz ovakav prikaz operacije s kompleksnim brojevima postaju mnogo preglednije: koristeći svojstvo dokazano u (1.39), imamo primjerice

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\, e^{i(\phi_1+\phi_2)} \ , \ \text{te} \quad z^n = r^n\, e^{in\phi} \tag{1.43}$$

za svaku cijelobrojnu potenciju $n \in \mathbb{Z}$. Koristeći kompleksni broj z jediničnog modula zapisan u polarnom obliku, $z = e^{i\phi}$, s lakoćom dolazimo do De Moivréovog teorema,

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = (e^{i\phi})^n = e^{in\phi} = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)$$

Primjer 1.7. Koristeći polarni zapis (1.42) pronađite naredne sume,

$$C_N = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(nx) \ , \quad S_N = \sum_{n=0}^{N-1} \sin(nx)$$

R. Koristeći formulu za sumu geometrijskog reda,

$$\sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{q^{m+1}-1}{q-1}$$

imamo

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{inx} = \frac{e^{iNx}-1}{e^{ix}-1} = \frac{e^{iNx/2}-e^{-iNx/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}\,\frac{e^{iNx/2}}{e^{ix/2}} = \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\, e^{i(N-1)x/2}$$

Odavde je dovoljno samo isčitati realni i imaginarni dio lijeve i desne strane jednakosti

$$C_N = \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\,\cos((N-1)x/2) \ , \quad S_N = \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\,\sin((N-1)x/2)$$

Konačno, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $z \in \mathbb{C}^\times$ jednadžba $w^n = z$ ima n rješenja, koja možemo elegantno zapisati u polarnom obliku,

$$w_k \ = \ \sqrt[n]{r}\, \exp\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\, i\right) \ , \quad k \in \mathbb{Z}_n \tag{1.44}$$

gdje je $\sqrt[n]{r} > 0$ "obični" n-ti korijen realnog broja r. Za sva rješenja w_k kažemo da su dobivena operacijom vađenja n-tog korijena iz kompleksnog broja z, kojeg najčešće pišemo kao $\sqrt[n]{z}$ ili $z^{1/n}$. Na primjer, rješenja jednadžbe $w^4 = 1$ dana su s

$$w_k = e^{k\pi i/2} \ , \quad k \in \{0,1,2,3\}$$

odnosno,

$$w_0 = e^{0i} = 1\ , \quad w_1 = e^{\pi i/2} = i\ , \quad w_2 = e^{\pi i} = -1\ , \quad w_3 = e^{3\pi i/2} = -i$$

Valja uočiti kako ova 4 kompleksna broja leže u vrhovima kvadrata upisanog u jediničnu kružnicu sa središtem u ishodištu, fenomen koji ćemo podrobnije promotriti u jednom od zadataka.

Trigonometrijske funkcije

Sve trigonometrijske funkcije moguće je s realne proširiti na kompleksnu domenu. Za početak imamo funkcije $\cos z$ i $\sin z$,

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ , \quad \cos z \ \equiv\ \frac{1}{2}\,(e^{iz} + e^{-iz}) \tag{1.45}$$

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ , \quad \sin z \ \equiv\ \frac{1}{2i}\,(e^{iz} - e^{-iz}) \tag{1.46}$$

Funkcije $\sin z$ i $\cos z$ su periodične s realnim periodom 2π, a jedine nul-točke su njihove realne nul-točke,

$$\begin{aligned} \sin z_k &= 0 \quad \text{za} \quad z_k = k\pi \\ \cos z_k &= 0 \quad \text{za} \quad z_k = (2k+1)\pi/2 \end{aligned}$$

za $k \in \mathbb{Z}$. Funkcije $\operatorname{tg} z$ i $\operatorname{ctg} z$ su definirane na cijelom skupu kompleksnih brojeva izuzev, redom, nul-točaka funkcije $\cos z$ i $\sin z$,

$$\operatorname{tg} z \ \equiv\ \frac{\sin z}{\cos z}\ , \quad \operatorname{ctg} z \ \equiv\ \frac{\cos z}{\sin z} \tag{1.47}$$

Funkcije $\operatorname{tg} z$ i $\operatorname{ctg} z$ su periodične s realnim periodom π, a jedine nul-točke su im, kao i kod funkcija $\sin z$ i $\cos z$, one realne ($\operatorname{tg} z$ ima iste nul-točke kao i $\sin z$, a $\operatorname{ctg} z$ iste nul-točke kao i $\cos z$).

Hiperboličke funkcije

Funkcije $\operatorname{ch} z$ i $\operatorname{sh} z$ su preslikavanja definirana s

$$\operatorname{ch} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ , \quad \operatorname{ch} z \ \equiv\ \frac{1}{2}\,(e^{z} + e^{-z}) \tag{1.48}$$

$$\operatorname{sh} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ , \quad \operatorname{sh} z \ \equiv\ \frac{1}{2}\,(e^{z} - e^{-z}) \tag{1.49}$$

Funkcije $\operatorname{sh} z$ i $\operatorname{ch} z$ su periodične s imaginarnim periodom $2\pi i$, a jedine nul-točke su njihove imaginarne nul-točke

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z_k &= 0 \quad \text{za} \quad z_k = k\pi i \\ \operatorname{ch} z_k &= 0 \quad \text{za} \quad z_k = (2k+1)\pi i/2 \end{aligned}$$

Funkcije $\operatorname{th} z$ i $\operatorname{cth} z$ su definirane na cijelom skupu kompleksnih brojeva izuzev, redom, nul-točaka funkcije $\operatorname{ch} z$ i $\operatorname{sh} z$,

$$\operatorname{th} z \ \equiv\ \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\ , \quad \operatorname{cth} z \ \equiv\ \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \tag{1.50}$$

Funkcije $\operatorname{th} z$ i $\operatorname{cth} z$ su periodične s imaginarnim periodom πi, a jedine nul-točke su im, kao i kod funkcija $\operatorname{sh} z$ i $\operatorname{ch} z$, one imaginarne ($\operatorname{th} z$ ima iste nul-točke kao i $\operatorname{sh} z$, a $\operatorname{cth} z$ iste nul-točke kao i $\operatorname{ch} z$).

$f(z)$	P_f	z_k	P_g	$g(z)$
$\sin z$	2π	$k\pi$	π	$\operatorname{tg} z$
$\cos z$	2π	$(2k+1)\pi/2$	π	$\operatorname{ctg} z$
$\operatorname{sh} z$	$2\pi i$	$k\pi i$	πi	$\operatorname{th} z$
$\operatorname{ch} z$	$2\pi i$	$(2k+1)\pi i/2$	πi	$\operatorname{cth} z$

Tablica 1.1: Periodi P_f, P_g i nul-točke z_k funkcija $f(z)$ i $g(z)$.

Logaritamska funkcija

Kažemo da je kompleksni broj w **logaritam** broja z, $w = \operatorname{Ln}(z)$, ako vrijedi $\exp(w) = z$. Za bilo koji $z \neq 0$ ova definicija daje beskonačno mnogo vrijednosti logaritma danog broja z prema

$$\operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z) = \ln|z| + i(\arg(z) + 2k\pi)\ , \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.51}$$

gdje je "ln" na desnoj strani jednadžbe "obični" prirodni logaritam definiran na skupu realnih brojeva. Kao i kod argumenta kompleksnog broja definiramo **glavnu vrijednost logaritamske funkcije**,

$$\ln(z) = \ln(r) + i\arg(z) \tag{1.52}$$

Primjer 1.8. Izra čunajte logaritam od slijedećih kompleksnih brojeva 1, i, $-i$, $-1-i$.

R. Korištenjem formule (1.51) imamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ln}(1) &= \ln(1) + i(\arg(1) + 2k\pi) = 2k\pi i\ , \\
\operatorname{Ln}(i) &= i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\ , \\
\operatorname{Ln}(-i) &= i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)\ , \\
\operatorname{Ln}(-1-i) &= \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)\ .
\end{aligned}$$

Logaritam produkta kompleksnih brojeva moguće je, kao i kod realnih brojeva, napisati kao sumu logaritama,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) &= \ln|z_1 \cdot z_2| + i\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \\
&= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i\operatorname{Arg}(z_1) + i\operatorname{Arg}(z_2) = \\
&= \operatorname{Ln}(z_1) + \operatorname{Ln}(z_2)
\end{aligned} \tag{1.53}$$

pri čemu smo koristili rastav logaritma produkta realnih brojeva i rastav argumenta produkta kompleksnih brojeva.

Potenciranje

Pomoću logaritamske funkcije moguće je definirati potenciranje i za kompleksnu potenciju. Za svaki $z \in \mathbb{C}^\times$ te $w \in \mathbb{C}$ definiramo

$$z^w \equiv \exp(w \operatorname{Ln} z) \,. \tag{1.54}$$

Valja uočiti kako je ovako definirano potenciranje općenito višeznačna funkcija, uz neke iznimke: ako je $z = e$ imamo jednoznačnu eksponencijalnu funkciju $\exp(w)$, dok za $z \neq e$ definicija ima jednoznačan smisao samo onda kada je $w \in \mathbb{Z}$.

Primjer 1.9. Izračunajte i^i.

R. Iz definicije potencije (1.54) imamo

$$i^i = \exp(i \operatorname{Ln} i) = \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right) \,,$$

gdje je $k \in \mathbb{Z}$.

1.4 ♣ ZADACI

1. Dokažite da je $P_n(z^*) = (P_n(z))^*$ za svaki polinom $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s realnim koeficijentima.

2. Rješite jednadžbu $z^* = z^{n-1}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

3. Izvrijednite naredne izraze za $n \in \mathbb{N}$,

$$a) \quad \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots \,, \quad b) \quad \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots$$

4. Napišite kompleksne brojeve ± 1, $\pm i$, $\pm 1 \pm i$ te $\pm 1 \mp i$ u polarnom obliku.

5. Riješite naredne jednadžbe:

$$a) \quad e^z = 1 \,, \quad b) \quad e^z = -1 \,, \quad c) \quad e^z = i \,,$$

$$d) \quad e^z = -i \,, \quad e) \quad e^z = 1 + i\sqrt{3}$$

6. Dokažite da vrijedi

$$|e^z| \leq e^{|z|} \,.$$

7. Dokažite da za $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\sqrt{a+ib} = \pm(\gamma + i\delta) \ ,$$

gdje su

$$\gamma = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \ , \quad \delta = \operatorname{sgn}(b)\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \ .$$

8. Pronađite sve vrijednosti narednih korijena i prikažite ih u kompleksnoj ravnini:

$a)\ \sqrt[3]{1}$, $b)\ \sqrt[3]{i}$, $c)\ \sqrt[6]{1}$, $d)\ \sqrt{1-i}$, $e)\ \sqrt[3]{3+4i}$, $f)\ \sqrt[5]{-4+3i}$.

9. Dokažite da korijeni jednadžbe $z^n - 1 = 0$, gdje je $n > 2$ prirodan broj, leže u kompleksnoj ravnini duž jedinične kružnice $|z| = 1$, u vrhovima pravilnog n-terokuta upisanog u tu kružnicu. ako je zadan kompleksni broj $a \in \mathbb{C}$, gdje se nalaze korijeni jednadžbe $z^n - a = 0$?

10. Pronađite vrhove pravilnog n-terokuta sa središtem u ishodištu kompleksne ravnine, ako mu je poznat jedan od vrhova, z_1.

11. Dokažite da sve vrijednosti z^i za $|z| = r \neq 0$ (gdje je r unaprijed zadana realna konstanta) leže na pravcu.

12. Izračunajte

a) $(-1+i\sqrt{3})^{60}$,

b) $\frac{(1+i)^{16}}{(1-i\sqrt{3})^9}$.

13. Izračunajte

$$a)\ 1^{-i} \ , \quad b)\ 1^{\sqrt{2}} \ , \quad c)\ (-1)^{\pi} \ , \quad d)\ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i} \ , \quad e)\ (-i)^{(-i)^{(-i)}}$$

14. Izračunajte $i^{\sin(i)}$.

15. Usporedite $\operatorname{Ln}(i^i)$ s $i\operatorname{Ln}(i)$. Da li rezultati jednaki ili se razlikuju?

16. Dokažite slijedeće identitete

$$(e^z)^* = e^{z^*} \ , \quad |e^z| = e^x \ , \quad \ln(z^*) = (\ln z)^*$$

$$(z^w)^* = (e^{w\ln z})^* = e^{(w\ln z)^*} = e^{w^*(\ln z)^*} = e^{w^*\ln(z^*)} = (z^*)^{w^*}$$

17. Dokažite slijedeće identitete

$$\sin(iz) = i\operatorname{sh} z \ , \quad \cos(iz) = \operatorname{ch} z$$

$$\operatorname{tg}(iz) = i\operatorname{th} z \ , \quad \operatorname{ctg}(iz) = -i\operatorname{cth} z$$

18. Dokažite da vrijedi

$$\sin(x+iy) = \sin x \ \mathrm{ch}\, y + i \cos x \ \mathrm{sh}\, y$$

$$\cos(x+iy) = \cos x \ \mathrm{ch}\, y - i \sin x \ \mathrm{sh}\, y$$

te

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2\, y \ , \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \mathrm{sh}^2\, y$$

19. Dokažite da vrijedi

$$\mathrm{sh}(x+iy) = \mathrm{sh}\, x \ \cos y + i \, \mathrm{ch}\, x \ \sin y$$

$$\mathrm{ch}(x+iy) = \mathrm{ch}\, x \ \cos y + i \, \mathrm{sh}\, x \ \sin y$$

te

$$|\mathrm{sh}\, z|^2 = \mathrm{sh}^2\, x + \sin^2 y \ , \quad |\mathrm{ch}\, z|^2 = \mathrm{sh}^2\, x + \cos^2 y$$

20. Provjerite tvrdnje o nul-točkama trigonometrijskih i hiperboličkih funkcija iz uvodnog teksta, odnosno, pokažite da su tamo navedene nul-točke uistinu jedine.

21. Inverzi funkcija $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{sh}\, z$, $\mathrm{ch}\, z$, $\mathrm{tg}\, z$ i $\mathrm{th}\, z$ označavaju se, kao i kod funkcija na realnoj domeni, redom s $\mathrm{Arcsin}\, z$, $\mathrm{Arccos}\, z$, $\mathrm{Arsh}\, z$, $\mathrm{Arch}\, z$, $\mathrm{Arctg}\, z$ i $\mathrm{Arth}\, z$ (alternativne oznake su $\sin^{-1} z$, $\cos^{-1} z$, itd.). Dokažite slijedeće identitete

$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i \, \mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) \ , \quad \mathrm{Arccos}\, z = -i \, \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\mathrm{Arsh}\, z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) \ , \quad \mathrm{Arch}\, z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\mathrm{Arctg}\, z = \frac{i}{2} \, \mathrm{Ln}\left(\frac{i+z}{i-z}\right) \ , \quad \mathrm{Arth}\, z = \frac{1}{2} \, \mathrm{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

22. Dokažite

$$a)\ \mathrm{th}\, \frac{z}{2} = \frac{\mathrm{sh}\, x + i \sin y}{\mathrm{ch}\, x + \cos y} \ , \quad b)\ \mathrm{cth}\, \frac{z}{2} = \frac{\mathrm{sh}\, x - i \sin y}{\mathrm{ch}\, x - \cos y}$$

23. Riješite jednadžbe

$$a)\ \cos z = \mathrm{ch}\, z \quad b)\ \sin z = i$$

24. Pronađite realni i imaginarni dio narednih funkcija kompleksne varijable,

$$a)\ z^3 \quad b)\ z^n \quad c)\ \frac{z-1}{z+1} \quad d)\ \mathrm{tg}\, z \quad e)\ \mathrm{th}\, z$$

25. Koristeći polarni zapis kompleksnih brojeva dokažite da za $x \in \langle 0, \pi \rangle$ i $-1 < p < 1$ vrijedi

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos((2n+1)x) = \frac{\sin(2Nx)}{2 \sin x}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\,\sin((2n+1)x) = (-1)^{N+1}\,\frac{\sin(2Nx)}{2\cos x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}p^n\cos(nx) = \frac{1-p\cos x}{1-2p\cos x+p^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}p^n\sin(nx) = \frac{p\sin x}{1-2p\cos x+p^2}$$

26. ako želimo rastaviti **glavnu vrijednost** logaritma produkta kompleksnih brojeva valja biti oprezan zbog mogućnosti da suma glavnih vrijednosti argumenata dotičnih kompleksnih brojeva izađe iz intervala u kojem glavna vrijednost argumenta poprima vrijednosti. U članku [tHV79] naveden je sljedeći teorem: za svaki par kompleksnih brojeva $a, b \in \mathbb{C}^\times$ vrijedi jednakost

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) + \eta(a,b) \tag{1.55}$$

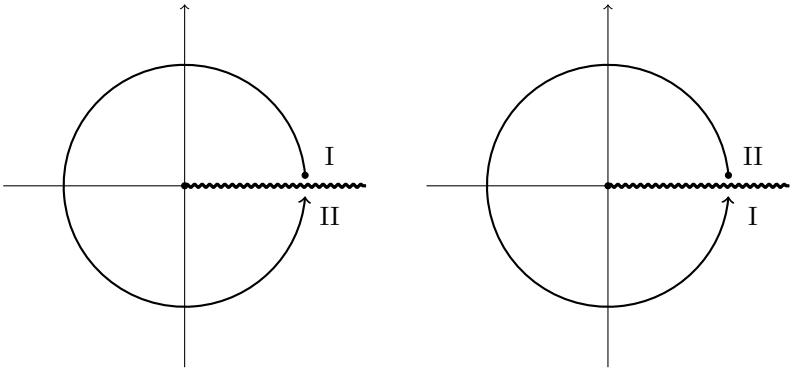
gdje je preko Heavisadeove funkcije $H(x)$ uvedena pokrata

$$\eta(a,b) = 2\pi i\Big(H(-\mathrm{Im}(a))\,H(-\mathrm{Im}(b))\,H(\mathrm{Im}(ab)) - \\ -H(\mathrm{Im}(a))\,H(\mathrm{Im}(b))\,H(\mathrm{Im}(-ab))\Big) \tag{1.56}$$

Provjeravanjem slučajeva dokažite njenu valjanost!

§ 1.5 Riemannove plohe

Ako se jedna točka domene preslikava u više od jedne točke kodomene onda to preslikavanje nije analitičko u okolini te točke. Ako je domena preslikavanja uobičajena kompleksna ravnina tada će biti potrebno više **grana** funkcije da se preslika cijela kodomena. Uobičajeno je još i reći da je takvo preslikavanje višeznačna funkcija. Pritom domenu svake od tih funkcija nazivamo **Riemannov list**. Njihovim "ljepljenjem" po pogodnom odabranom **rezu**, moguće je konstruirati jedinstvenu domenu koja se još naziva **Riemannova ploha**.
Rez je krivulja na Riemannovoj plohi koja omogućuje da sa jednog lista prijeđemo na drugu. Točke na kojima počinje i završava Riemannov rez zovu se **točke grananja**.
Točku grananja nalazimo po slijedećem kriteriju: namatanje po zatvorenoj krivulji oko točke grananja rezultira prelasku s jednog na drugi Riemannov list. Taj prijelaz je nužno diskontinuiran pa se dvije infinitezimalno bliske točke na krivulji preslikavaju u dvije konačno razmaknute u kodomeni.



Slika 1.2: Prikazana su dva Riemannova lista funkcije $f(z) = \sqrt{z}$. Krivulje označavaju jednu moguću putanju po Riemannovoj plohi.

Primjer 1.10. Pronađite točke grananja, te konstruirajte rez i pripadnu Riemannovu plohu funkcije $f(z) = \sqrt{z}$, $0 \leq \arg(z) < 2\pi$. Diskutirajte i slučaj $-\pi \leq \arg(z) < \pi$.

R. Korijenovanje kompleksnog broja je višeznačna operacija. Specijalno za $f(z) = \sqrt{z}$ imamo

$$f(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i(\theta+2k\pi)/2}\ , \quad k \in \{0, 1\},$$

čime svakom kompleksnom broju z pridružujemo dvije vrijednosti. Slijedi da je nužno definirati dvije grane funkcije $f(z)$. Možemo uzeti

$$f_1(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}\ , \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

$$f_2(re^{i\theta}) = -\sqrt{r}e^{i\theta/2}\ , \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

pa je kompleksna ravnina jedna, a funkcije dvije. Obrnuto, možemo uzeti: $f(re^{i\theta_i}) = \sqrt{r}e^{i\theta_i/2}$, pa je funkcija jedinstvena ali imamo dvije kompleksne ravnine: $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ i $2\pi \leq \theta_2 < 4\pi$.

Okrenimo se sad za puni krug oko točke $z = 0$, po kružnici jediničnog radijusa, kao na slici 1.2. Bez smanjenja općenitosti možemo se ograničiti na promatranje grane $f_1(z)$. Bliske točke $a = e^{i\delta}$ i $b = e^{i(2\pi-\delta)}$, gdje je δ infinitezimalan preslikavaju se u $a' = e^{i\delta}$ i $b' = e^{i(\pi-\delta)}$ koje su konačno udaljene. Ista tvrdnja vrijedi i za kružnicu proizvoljnog polumjera, pa je $z = 0$ točka grananja.

Rez je ona krivulja duž koje je funkcija $f(z)$ diskontinuirana, što je u ovom slučaju pozitivna realna os. Riemannova ploha dobiva se ljepljenjem dviju kompleksnih ravnina duž reza, tako da nakon punog kruga po donjoj ravnini prelazimo na gornju, pa nas još jedan puni krug vraća ponovno na donju ravninu (vidi sliku 1.2).

Ako je $-\pi \leq \arg(z) < \pi$ bliske točke $a = e^{i(\pi-\delta)}$ i $b = e^{i(-\pi+\delta)}$ preslikavaju se u konačno udaljene $a' = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)}$ i $b' = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\delta\right)}$. Zaključujemo da je $z = 0$ točka grananja, ali se rez ovaj put nalazi na negativnoj realnoj osi.

Istu točku grananja imati će i $z^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$, s tim da sad n listova gradi Riemannovu plohu. Tek nakon n namatanja oko ishodišta vraćamo se u početnu točku.

Važno je napomenuti da iako položaj reza ovisi o definiciji argumenta (npr. da li je domena $[0, 2\pi\rangle$ ili $\langle -\pi, \pi]$), točka grananja je o tome neovisna.

Primjer 1.11. Pronađite točke grananja, te konstruirajte rez i pripadnu Riemannovu plohu funkcije $f(z) = \log z$, $0 \leq \arg(z) < 2\pi$.

R. Vrijedi

$$f_k(re^{i\theta}) = \ln(r) + i(\theta + 2k\pi) \ , \quad k \in \mathbb{Z},$$

pa logaritamska funkcija ima beskonačno mnogo grana. Sličnom argumentacijom kao u prošlom primjeru točka grananja je $z = 0$. Rez se nalazi na pozitivnoj realnoj osi. Riemannova ploha se konstruira s beskonačno mnogo listova.

Primjer 1.12. (Bernoullijev paradoks) Neka je $z_1 = -\sqrt{3}$, $z_2 = -1 + \frac{i}{\sqrt{3}}$. Neka je $f(z) = \ln z$ tako da vrijedi $f(1) = 0$. Ako je rez $f(z)$ na negativnoj realnoj osi, izračunajte $f(z_1) + f(z_2)$ i $f(z_1 z_2)$ te objasnite zašto se razlikuju.

R. U polarnom obliku $z_1 = \sqrt{3}e^{i\pi}$, $z_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Imamo $f(z_1) = 2\ln 3 + i\pi$, te $f(z_2) = \ln 2 - 2\ln 3 + i\frac{5\pi}{6}$. Slijedi

$$f(z_1) + f(z_2) = \ln 2 + i\frac{11\pi}{6}.$$

S druge strane $z_1 z_2 = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$, no $\arg(z_1 z_2) = -\frac{\pi}{6}$, jer $f(1) = 0$ ograničava logaritam na glavnu granu. Stoga

$$f(z_1 z_2) = \ln 2 - i\frac{\pi}{6}.$$

Paradoks nastaje zbog toga jer množenjem dvaju kompleksnih brojeva možemo izaći van domene argumenta, čime višeznačna funkcija prelazi s jedne grane na drugu.

Primjer 1.13. Za funkciju $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ provjerite da su $z = -1$ i $z = 1$ točke grananja. Konstruirajte rez i pripadnu Riemannovu plohu.

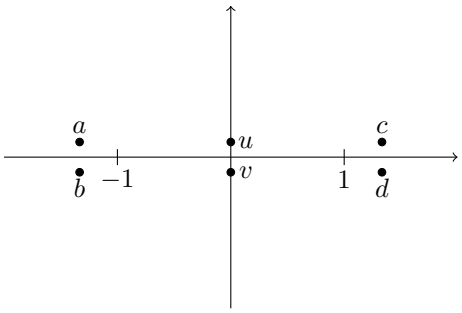
R. Za višeznačni korijen možemo pisati $f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{z - 1}\sqrt{z + 1}$. Grane ove funkcije su $f_{ij}(z) = g_i(z_1) g_j(z_2)$, gdje za $i, j = \pm$ imamo $g_\pm(z) = \pm\sqrt{r} e^{i\theta/2}$, te $z_{1,2} = z \mp 1$. Od četiri grane, samo dvije su nezavisne. Za pronaći točku grananja dovoljno se ograničiti npr. na

$$f_{++}(z) = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\theta} \ , \quad \theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}.$$

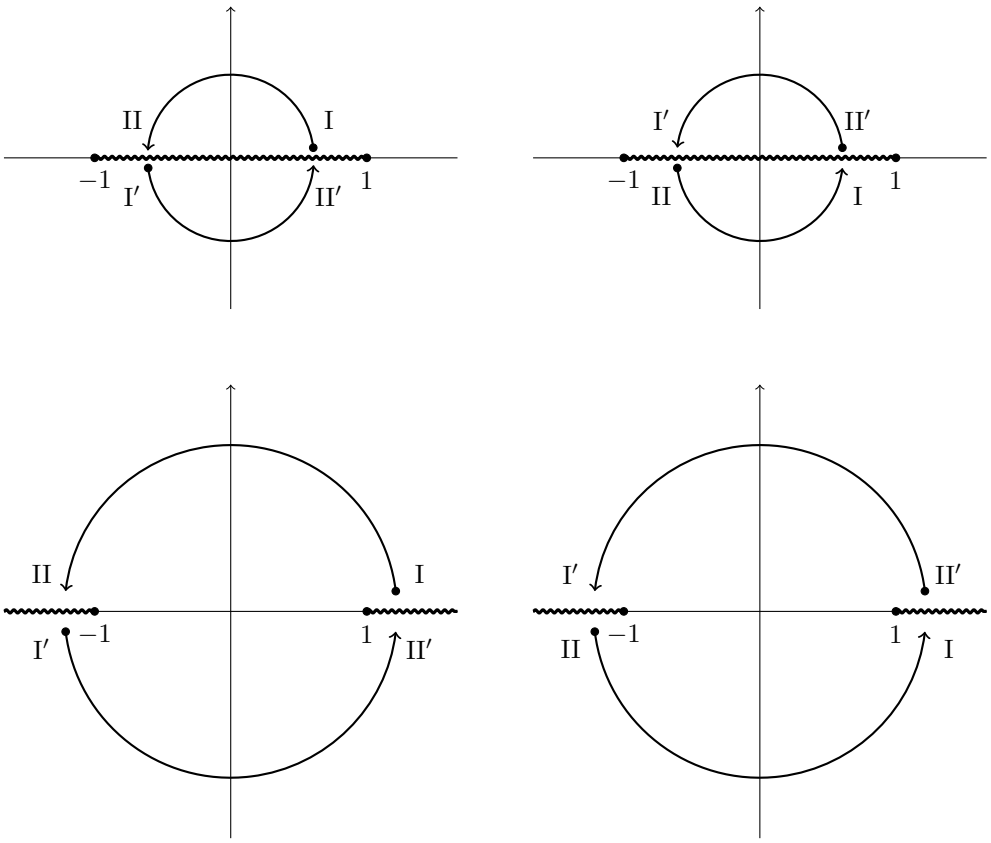
Odaberimo glavne vrijednosti argumenta $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ i $0 \leq \theta_2 < 2\pi$. Točku grananja i rez određuemo tako da promatramo karakteristične točke a i b, te c i d, odnosno u i v čija će nam parametrizacija omogućiti da pokrimo cijelu realnu os, odnosno tik iznad te tik ispod nje, vidi sliku 1.3.

Točke a i b te c i d su definirane kao

$$a = (1 + r)e^{i(\pi - \delta)} \, , \qquad b = (1 + r)e^{i(\pi + \delta)} \ ,$$



Slika 1.3: Na slici su dane karakteristične točke: mijenanjem njihovog modela u mogućnosti smo analizirati cijelu realnu os.



Slika 1.4: Na gornjim slikama prikazana su dva Riemannova lista funkcije $f(z) = \sqrt{z^2-1}$. Za odabir kuteva $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ i $0 \leq \theta_2 < 2\pi$ rez se nalazi između točaka -1 i 1. Prikazane su i moguće putanje kojima smo u mogućnosti prebrisati cijelu Riemannovu plohu. Na donjim slikama ista je analiza ponovljena za odabir kuteva $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ i $-\pi \leq \theta_2 < \pi$.

$$c = (1+r)e^{i\delta}\,, \qquad d = (1+r)e^{i(2\pi-\delta)}\,,$$

gdje je $r > 0$ te $\delta > 0$ infinitezimalan. Točke u i v definirane su kao

$$u = \epsilon e^{i\pi/2}\,, \qquad v = \epsilon e^{i3\pi/2}\,,$$

gdje je $\epsilon > 0$ infinitezimalan.

Za svaku od tih točaka zanimaju nas argumenti θ_1 i θ_2, odnosno θ. Ako se ispostavi da dvije bliske točke imaju konačno udaljene argumente onda na tom dijelu imamo diskontinuitet. Računom je lako pokazati da vrijedi

točka a: $\theta_1 = \pi - \delta\,,\ \theta_2 = \pi - \delta \ \to\ \theta = \pi - \delta$,

točka b: $\theta_1 = \pi + \delta\,,\ \theta_2 = \pi + \delta \ \to\ \theta = \pi + \delta$,

točka c: $\theta_1 = \delta\,,\ \theta_2 = \delta \ \to\ \theta = \delta$,

točka d: $\theta_1 = 2\pi - \delta\,,\ \theta_2 = 2\pi - \delta \ \to\ \theta = 2\pi - \delta$,

točka u: $\theta_1 = \pi - \epsilon\,,\ \theta_2 = \epsilon \ \to\ \theta = \frac{\pi}{2}$,

točka v: $\theta_1 = \pi + \epsilon\,,\ \theta_2 = 2\pi - \epsilon \ \to\ \theta = \frac{3\pi}{2}$.

Iz ove analize stoga možemo zaključiti da su točke $z = -1$, te $z = 1$ točke grananja, te da se rez proteže između te dvije točke.

U slučaju kada je jedan od kuteva, recimo θ_2 definiran s $-\pi \leq \theta_2 < \pi$, argumenti su dani kao

točka a: $\theta_1 = \pi - \delta\,,\ \theta_2 = \pi - \delta \ \to\ \theta = \pi - \delta$,

točka b: $\theta_1 = \pi + \delta\,,\ \theta_2 = -\pi + \delta \ \to\ \theta = \delta$,

točka c: $\theta_1 = \delta\,,\ \theta_2 = \delta \ \to\ \theta = \delta$,

točka d: $\theta_1 = 2\pi - \delta\,,\ \theta_2 = -\delta \ \to\ \theta = \pi - \delta$,

točka u: $\theta_1 = \pi - \epsilon\,,\ \theta_2 = \epsilon \ \to\ \theta = \frac{\pi}{2}$,

točka v: $\theta_1 = \pi + \epsilon\,,\ \theta_2 = -\epsilon \ \to\ \theta = \frac{\pi}{2}$.

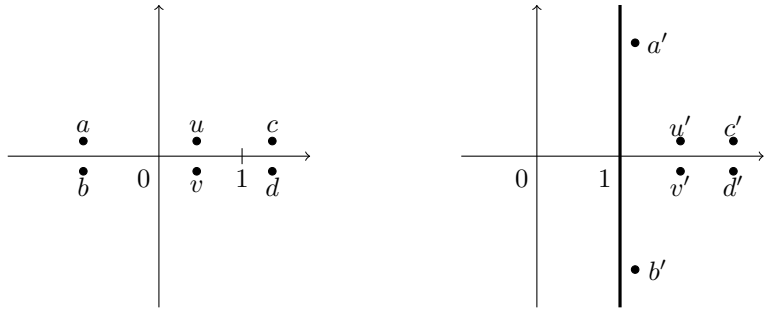
U ovom slučaju, i dalje zaključujemo da su $z = -1$, te $z = 1$ točke grananja, međutim, rez se sada proteže od ∞ do -1 te od 1 do ∞. Konstrukcija Riemannove plohe za obje situacije prikazana je, tipičnom krivuljom na danoj Riemannovoj plohi na slici 1.4.

Primjer 1.14. Pronađite točke grananja, konstruirajte rez i pripadnu Riemannovu plohu funkcije $f(z) = \sqrt{1+\sqrt{z}}$, $-\pi < \arg(z) \leq \pi$.

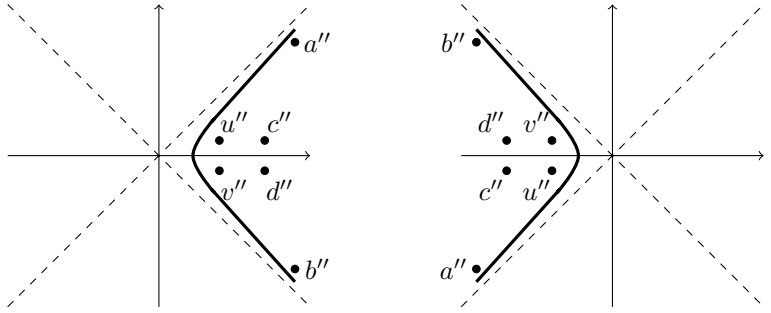
R. Zbog dvostrukog korijena $f(z)$ ima četiri grane. Ako definiramo $g_\pm(z) = \pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}$, to su $f_{ij}(z) = g_i(1 + g_j(z))$, gdje je $i, j = \pm$. Sumnjive točke su 0 i 1. U tu svrhu definiramo bliske točke a, b, c, d, te u i v kao na slici 1.5. Vrijedi $|a|, |b| > 0$, $|c|, |d| > 1$, $|u|, |c| < 1$. Usredotočimo se za početak na granu f_{++}. Sa slike 1.5 vidljivo je da se sve točke osim a i b se preslikavaju u bliske točke u $1 + f_+(z)$ ravnini. Variranjem $|a|$ i $|b|$ u $1 + f_+(z)$ ravnini kreiramo polubeskonačan pravac $1 + i\sqrt{|a|}$ te $1 - i\sqrt{|b|}$. U $f_{++}(z)$ ravnini, variranjem $|a|, |b|$ generiramo hiberbolu: ako napišemo $f_{++} = x + iy$ slijedi da je

$$1 = x^2 - y^2\,, \quad 2xy = \sqrt{|a|},$$

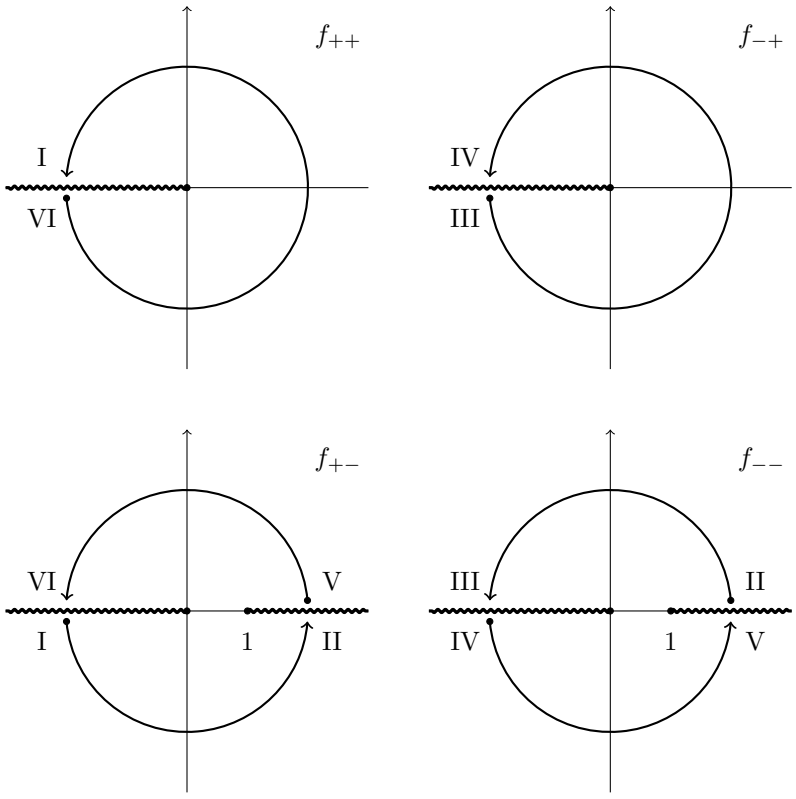
što je i vidljivo sa slike 1.6. Kako je za granu f_{++} $x > 0$, variranjem $|a|$ konstruira se gornja polovica hiperbole na $\mathrm{Re}(z) > 0$, dok variranje $|b|$ konstruira donju polovicu kao na slici 1.6. Zaključujemo da f_{++} ima rez duž negativne realne osi. Ista situacija je i s f_{-+}. S druge strane, f_{+-}, te f_{--} uz rez na negativnoj realnoj osi imaju rez



Slika 1.5: Lijeva slika prikazuje kompleksnu ravninu domene. Prikazane su odabrane točke a, b, c, d, te u i v. Njima smo u mogućnosti prebrisati cijeli pravac infinitezimalno iznad te infinitezimalno ispod realne osi. Na desnoj slici je dano preslikavanje tih točaka u $1+f_+(z)$ ravninu, gdje smo za oznake preslikanih točaka rabili crtane varijable, npr. $1 + f_+(a) = a'$.



Slika 1.6: Lijeva slika prikazuje preslikavanje točaka u $f_{++}(z)$ ravninu, dok je na desnoj slivi prikazano preslikavanje u $f_{-+}(z)$ ravninu. Za oznake smo koristili dvocrtane varijable, npr. $f_{++}(a) = a''$ na lijevoj slici odnosno $f_{-+}(a) = a''$ na desnoj slici.



Slika 1.7: Na slici su prikazane domene svih grana funkcije $f(z) = \sqrt{1+\sqrt{z}}$ kao i jedna moguća putanja obilježena rimskim brojevima I-VI.

koji se od $z = 1$ proteže duž pozitivne realne osi. Npr. za f_{+-}, imamo situaciju u kojoj se osim točaka a i b konačno udaljuju i točke c i d. Razlog tomu je što nakon preslikavanja u $1 + f_-$ ravninu c i d "pobjegnu" na negativnu realnu os, pa se onda nakon još jednog preslikavanja u f_{+-} ravninu te točke nužno udalje. Ista situacija je i za funkciju f_{--}.
Riemannova ploha se konstruira ljepljenjem četiri Riemannova lista od kojih dva imaju rez samo na negativnoj realnoj osi, a druga dva još i od točke $z = 1$ po pozitivnoj realnoj osi. Listove ljepimo tako da možemo konstruirati zatvorenu krivulju koja će se po cijeloj plohi namotati samo jednom. Primjer takve krivulje dan je na slici 1.7.

U slučaju kada imamo funkciju $z^{p/q}$, gdje su p i q relativno prosti brojevi, broj Riemannovih listova je q; u slučaju kada imamo funkciju z^a, gdje je a iracionalan broj imamo beskonačno mnogo listova.

Riemannova sfera

Skup kompleksnih brojeva možemo proširiti tako da uključuje i točku u beskonačnosti. To se radi tako da se svakoj točci u kompleksnoj ravnini pridruži jedinstvena točka na sferi. Koristiti ćemo konvenciju da se točka u kojoj sfera dotiče kompleksnu ravninu definira kao ishodište, ili **južni pol**. Tamo gdje okomica iz ishodišta siječe sferu naziva se **sjeverni pol**. Preslikavanje točke z na ravninu se vrši tako da se povuče pravac od z do sjevernog pola. Točki z pridružujemo onu točku u kojoj pravac siječe sferu. To se formalno naziva **stereografska projekcija**. Zbog svoje specijalne svrhe, ovakva sfera poznata je pod nazivom **Riemannova sfera**. Sve Riemannove plohe koje smo do sada upoznali su **nekompaktne**. Riemannova sfera je jednostavan primjer **kompaktne** Riemannove plohe.
Idemo za početak proširiti skup realnih brojeva tako da uključuje točku u beskonačnosti. Potom je lako problem generalizirati na kompleksnu ravninu.

Primjer 1.15. Napravite stereografsku projekciju skupa $\mathbb{R}$.

R. Neka se u ishodištu nalazi Riemannova sfera polumjera R. Točku na sferi (koja je u ovom slučaju obična kružnica) definirati ćemo kutom α kao slici 1.8. Cilj je pronaći transformaciju koja svakom $x \in \mathbb{R}$ pridružuje jedinstveni α. Sa slike je lako očitati

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{2R}{x}, \tag{1.57}$$

kao i $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$. Slijedi

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{1 - \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

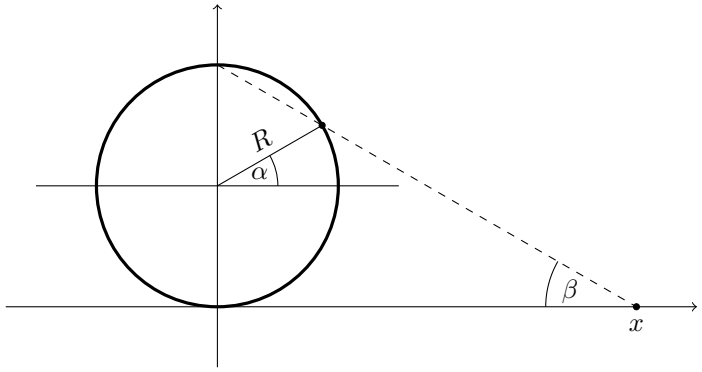
Ako to sad uvrstimo u (1.57)

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2R - x}{2R + x}.$$

Radijus sfere je proizvoljan, konvencionalno se uzima $2R = 1$, pa je traženi rezultat

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - x}{1 + x}. \tag{1.58}$$

Kao specijalan slučaj, točka u beskonačnosti sada odgovara $\alpha = \pi/2$.



Slika 1.8: Stereografska projekcija skupa $\mathbb{R}$.

Primjer 1.16. Napravite stereografsku projekciju skupa $\mathbb{C}$.

R. Neka se u ishodištu nalazi Riemannova sfera polumjera $2R = 1$. Točku na sferi definirati ćemo s dva kuta. Jedan od njih može ostati α iz prethodnog problema, s tim da sad x zamijenimo s $\sqrt{x^2+y^2}$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Preostali kut ϕ definiramo kao otklon od pozitivne osi x, kao na slici xx. Trivijalno vrijedi $\mathrm{tg}\phi = y/x$. Time smo u potpunosti riješili problem, no zgodno je umjesto α uzeti $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Nakon analogne manipulacije kao u prethodnom primjeru

$$\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = |z| \ , \quad \mathrm{tg}\phi = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}. \tag{1.59}$$

Stereografska projekcija ilustrira činjenicu da je točka u beskonačnosti "obična točka". Analogna situacija je kod prelaska s Kartezijevog na polarni prikaz kompleksnog broja: u polarnim koordinatama točka $z = 0$ nije definirana.

1.5 ♣ ZADACI

1. Pronađite pogrešku u ovom "paradoksu",

$$-1 = i \cdot i = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{+1} = +1$$

2. Objasnite prividan paradoks (prvi put ga je opazio danski matematičar Thomas Clausen 1826. godine): $e = e^{1+2\pi i}$, stoga

$$e = e^{1+2\pi i} = (e^{1+2\pi i})^{1+2\pi i} = e^{1+4\pi i-4\pi^2} = e^{1-4\pi^2} \quad ?$$

3. Pronađite točke grananja, te konstruirajte rez i pripadnu Riemannovu plohu za slijedeće funkcije

a) $f(z) = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{1/2}$,

b) $f(z) = (z(z+1))^{1/3}$,

c) $f(z) = z^{1/2} + z^{1/3}$,

d) $f(z) = \mathrm{Arcsin} z$.

4. Invertirajte jednadžbe (1.59).

5. Kojim krivuljama u kompleksnoj ravnini odgovaraju kružnice na Riemannovoj sferi koje su paralelne, odnosno okomite, u odnosu na kompleksnu ravninu? Kojim krivuljama na Riemannovoj sferi odgovaraju paralelni pravci u kompleksnoj ravnini?

6. Dokažite da stereografska projekcija čuva kuteve. Takvo preslikavanje naziva se **konformno**.

7. Dokažite da stereografska projekcija ne čuva površine. Pomoć: izvrijednite infinitezimalni element površine $dS = dxdy$ u koordinatama θ, ϕ.

§ 1.6 Nizovi i redovi kompleksnih brojeva

Nizovi

Beskonačan **niz** kompleksnih brojeva $\{z_n\} = \{z_1, z_2, \dots\}$ konvergira broju z ako za proizvoljan $\epsilon > 0$, postoji takav $N \in \mathbb{N}$, da

$$\forall n > N \ : \ |z - z_n| < \epsilon$$

Teorem 1.2. *Niz* $\{z_n\}$ *konvergira broju* $z = x + iy$ *ako i samo ako* $\mathrm{Re}(z_n)$ *konvergira broju* x*, a* $\mathrm{Im}(z_n)$ *broju* y*.*

Dokaz : Ako $\mathrm{Re}(z_n) = x_n \to x$ te $\mathrm{Im}(z_n) = y_n \to y$, tada za $n > N$

$$|z - z_n| = |(x - x_n) + i(y - y_n)| \leq |x - x_n| + |y - y_n| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Obratno, ako za dani ϵ imamo takav N da za svaki $n > N$ vrijedi $|z - z_n| < \epsilon$, tada slijedi

$$|x - x_n| < \epsilon \ , \quad |y - y_n| < \epsilon$$

pa je time pokazan teorem. □

Niz z_n nazivamo **Cauchyevim** ako dani $\epsilon > 0$ postoji takav $N \in \mathbb{N}$ da za svaki $m, n > N$ vrijedi $|z_m - z_n| < \epsilon$.

Vrijede uobičajeni teoremi:

Teorem 1.3. $\lim(z_n \pm w_n) = \lim(z_n) \pm \lim(w_n)$

Teorem 1.4. $\lim(z_n \cdot w_n) = \lim(z_n) \cdot \lim(w_n)$

Redovi

Za beskonačan **red** kompleksnih brojeva

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

kažemo da je konvergentan ako niz $\{s_n\}$ parcijalnih suma $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ konvergira.

Teorem 1.5. *Red je* **apsolutno konvergentan** *ako realan red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

konvergira.

Apsolutno konvergentan red je uvijek i konvergentan (trivijalno), ali obrat ne mora vrijediti.

Nužan kriterij konvergecije je da ako $\sum z_n$ konvergira onda mora vrijediti $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. Obratno, ako $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$ red divergira.

Testovi konvergencije

Teorem 1.6. (integralni test) *Ako $f(x) \geq 0$ za $x \geq a$, onda $\sum f(n)$ konvergira ili divergira ovisno o tome da li integral $\lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx$ konvergira ili divergira.*

Teorem 1.7. (test usporedbom) *Ako za $\forall n$ vrijedi $|z_n| \leq |w_n|$ i $\sum w_n$ je apsolutno konvergentan, tada $\sum z_n$ konvergira apsolutno. U suprotnom, ako $\sum |w_n|$ divegira i $|z_n| \geq |w_n|$, onda $\sum |z_n|$ divergira, ali $\sum z_n$ može i ne mora konvergirati.*

Teorem 1.8. (test omjerom) *Ako $\lim_{n\to\infty} |z_{n+1}/z_n| = L$ tada $\sum z_n$ konvergira apsolutno za $L < 1$. Za $L > 1$ red divegira. U slučaju $L = 1$, test nije važeći.*

Teorem 1.9. (korijenski test) *Ako $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$ tada $\sum z_n$ konvergira apsolutno za $L < 1$. Za $L > 1$ red divegira. U slučaju $L = 1$, test nije važeći.*

Teorem 1.10. (test za alternirajući red) *Ako je $z_n \geq 0$, te $z_{n+1} \leq z_n$ i $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, tada $\sum(-1)^{n-1} z_n$ konvergira.*

Teorem 1.11. *Red* $\sum z_n = \sum(x_n + iy_n)$ *konvergira u* $S = P + iQ$ *ako i samo ako* $\sum x_n$ *konvergira u* P *i* $\sum y_n$ *konvergira u* Q. *Ovaj test je pogodan u slučaju redova koji su konvergentni, ali nisu apsolutno konvergentni.*

Kompleksni redovi mogu se zbrajati i oduzimati ako su konvergentni. Množenje redova je dozvoljeno samo ako su apsolutno konvergentni.

Primjer 1.17. Pokažite da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\ , \quad p \in \mathbb{R}$$

divergira za $p = 1$. Pokažite da konvergira za $p > 1$.

R. Specijalan slučaj $p = 1$ se naziva **harmonijski red**. Divergentnost harmonijskog reda slijedi iz integralnog testa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > \lim_{M\to\infty} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{M\to\infty} (\ln M - \ln 1),$$

čime limes divergira. S druge strane, ako uzmemo $p = 1 + \epsilon$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} > \lim_{M\to\infty} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\epsilon}} = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{\epsilon}\left(1 - \frac{1}{M^{\epsilon}}\right) \leq \frac{1}{\epsilon}.$$

pa red konvergira za $p > 1$. U ovom slučaju je p-red poznat pod nazivom **Riemannova zeta funkcija**, i označava se sa $\zeta(p)$.

Primjer 1.18. Pronađite n-tu parcijalnu sumu geometrijskog reda

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} p^k$$

Za koji p $\lim_{n\to\infty} s_n$ konvergira? Izračunajte taj limes.

R. Ako pomnožimo ps_n slijedi

$$ps_n - s_n = (p + p^2 + p^3 + \cdots + p^n) - (1 + p + p^2 + \ldots p^{n-1}) = p^n - 1,$$

odnosno

$$s_n = \frac{1 - p^n}{1 - p}.$$

Po testu omjerom, ako je $|p| < 1$, red konvergira, te vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1 - p}.$$

Primjer 1.19. Pronađite da li slijedeći redovi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiraju

$$\text{a) } c_n = \frac{4^n}{3^n n}\ , \quad \text{b) } c_n = \frac{1}{(3i)^n + n}\ , \quad \text{c) } c_n = \frac{n!}{n^n}\ , \quad \text{d) } c_n = e^{in}.$$

R.

a) Korijenski test:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{|c_n|} = \frac{4}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = \frac{4}{3}.$$

Red divergira.

b) Test usporedbom:

$$|c_n| = \left| \frac{1}{(3i)^n + n} \right| \leq \frac{1}{|3^{2n} - n|} \leq \frac{1}{2^n}\ ,$$

čime smo dobili konvergentan geometrijski red.

c) Test omjerom:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{(n+1)^n(n+1)} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{e}.$$

Red konvergira.

d) Ako $z = e^i$, pa imamo geometrijski red $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Kako je $|z| = 1$, red divergira.

Primjer 1.20. Pokažite da $\sum \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2+1}$, $n \geq 1$, konvergira.

R. Vrijedi $c_n = n/(n^2 + 1) > 0$. Ako promatramo $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ slijedi $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \leq 0$, pa je $f(x)$ strogo padajuća, pa je $c_{n+1} < c_n$. Pošto je $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, po testu za alternirajući red, ovaj red konvergira.

Redovi funkcija–uniformna konvergencija

Za niz funkcija $\{f_n(z)\}$ definiranih na nekom području $\mathcal{D}$ kažemo da konvergira u funkciju $f(z)$ zadanu na tom području, ako vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \qquad \forall z \in \mathcal{D}$$

Niz funkcija $\{f_n(z)\}$ konvergira **uniformno** na nekom području $\mathcal{D}$ ako za dani $\epsilon > 0$ postoji prirodan broj N *jedinstven za sve* $z \in \mathcal{D}$, takav da za sve $n > N$ vrijedi

$$|f(z) - f_n(z)| < \epsilon.$$

Drugim rječima, uniformno konvergentan niz konvergira *jednako brzo* za sve kompleksne brojeve u nekom području. Red funkcija $\sum f_n(z)$ uniformno konvergira na nekom području $\mathcal{D}$ ako niz njegovih parcijalnih suma konvergira uniformno na tom području.

Primjer 1.21. Pokažite da niz $f_n(z) = \frac{nz^2}{nz^2+1}$, $z \in \mathbb{C}$ nije uniformno konvergentan.

R. Poanta uniformne konvergencije je da uvijek možemo naći član dovoljno visoko u nizu za kojeg će ϵ biti proizvoljan. S druge strane, limes niza funkcija $f_n(z)$

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{nz^2}{nz^2+1} = \begin{cases} 0\,, & z = 0 \\ 1\,, & z \neq 0 \end{cases},$$

nije kontinuiran u $z = 0$. To znači da nikada nećemo moći uzeti samo jedan, ali proizvoljan $\epsilon > 0$ tako da za dovoljno veliki N vrijedi $|f_N(z) - f(z)| < \epsilon$. Npr. ako se ograničimo na realnu os vidimo da taj uvjet vodi na to da mora vrijediti

$$N > \frac{1-\epsilon}{\epsilon x^2}\,,$$

pa kako $x \to 0$ slijedi $N \to \infty$.

Teorem 1.12. (Weierstrassov M-test) *Red funkcija $\sum f_n(z)$ je uniformno konvergentan na području $\mathcal{D}$ ako postoji niz pozitivnih brojeva M_n (neovisnih o z!), takvih da je red $\sum M_n$ konvergentan i vrijedi*

$$|f_n(z)| \leq M_n \qquad \forall z \in \mathcal{D}$$

Primjer 1.22. Pokažite na kojem je područvju **red potencija** $f_n(z) = z^n/n!$ uniformno konvergentan.

R. Primjenjujemo Weierstrassov M-test: uzmimo da je područje $\mathcal{D}$ kružnica polumjera R. Tada

$$|f_n(z)| = \frac{|z^n|}{n!} = \frac{|z|^n}{n!} \leq \frac{R^n}{n!} = M_n\,.$$

Po testu omjerom, niz pozitivnih brojeva M_n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = R \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0\,,$$

konvergira za svaki konačni R. Slijedi da $\sum_n f_n(z)$ konvergira uniformno.

Primjer 1.23. Pokažite da red funkcija $\sum_n f_n(z)$

$$f_n(z) = \frac{z^2}{(1+nz^2)(1+(n-1)z^2)}\,,$$

ne konvergira uniformno.

R. Dovoljno je pokazati da red parcijalnih suma ne konvergira uniformno. Ako gornji izraz rastavimo na parcijalne razlomke

$$g_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{1+(n-1)z^2} - \frac{1}{1+nz^2} \right),$$

lako se uvjerimo da se jedino prvi član prve sume i posljednji član druge sume međusobno ne poništavaju. Stoga

$$g_N(z) = 1 - \frac{1}{1+Nz^2} = \frac{Nz^2}{1+Nz^2}.$$

Za ovaj niz funkcija znamo da ne konvergira uniformno, pa stoga niti red $\sum_n f_n(z)$ ne konvergira uniformno.

Vrijede sljedeći teoremi:

Teorem 1.13. (o neprekidnosti) *Zbroj uniformno konvergentnih redova neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.*

Teorem 1.14. (o integrabilnosti) *Uniformno konvergentan red neprekidnih funkcija može se integrirati član po član.*

Teorem 1.15. (o diferencijabilnosti) *Uniformno konvergentan red funkcija može se derivirati član po član ako svi članovi imaju neprekidne derivacije i rezultantni red funkcija je uniformno konvergentan.*

Teorem 1.16. *Suma i produkt uniformno konvergentnih redova je uniformno konvergentan red (na istom području).*

Teorem 1.17. (Weierstrass) *Ako su članovi reda $\sum f_n(z)$ analitički unutar i duž zatvorene krivulje $\mathcal{C}$, te red konvergira uniformno duž $\mathcal{C}$, tada je suma analitička funkcija (unutar i na $\mathcal{C}$) i red se može derivirati ili integrirati bilo koji broj puta.*

1.6 ♣ ZADACI

1. Provjerite da li niz

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}}\ , \quad n \geq 1\ ,$$

konvergira. Ako konvergira, pronađite njegov limes.

2. Provjerite konvergenciju slijedećih redova

$$\text{a)}\ \sum_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}\ , \quad \text{b)} \sum_n n^{1/n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}\ .$$

3. Pokažite da slijedeći redovi $\sum c_n$, $n \geq 1$, divergiraju

$$\text{a)}\ c_n = n^{1/n}\ , \quad \text{b)}\ c_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\ .$$

4. Pronađite grešku u slijedećem razmatranju (Eulerov paradoks):

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \ , \quad \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{-\infty} z^n \ .$$

Slijedi $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} z^n = 0$ (zadatak preuzet iz Schauma complex variables).

5. U svakom od slijedećih problema testirajte konvergenciju reda $\sum c_n$:

$$\text{a) } c_n = \frac{(in)^{10}}{10^{in}} \ , \quad \text{b) } c_n = \frac{\ln^2 n}{n} \ , n \geq 1 \ , \quad \text{c) } c_n = n^2 e^{-n^3} \ , \quad \text{d) } c_n = \frac{1}{3^n + i} \ ,$$

$$\text{e) } c_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \ , \quad \text{f) } c_n = \frac{n^3 - n^2 + n}{n^4 + 3n^3 + 2n^2 + n + 1} \ .$$

6. Testirajte konvergenciju slijedećih redova $\sum c_n$:

$$\text{a) } c_n = \frac{(-1)^n (n^3 - 1)}{n^3 + 3n^2 + 2n + 1} \ , \quad \text{b) } c_n = \frac{(-1)^{n-1} e^{1/n}}{n} \ , \quad \text{c) } c_n = \frac{(-3)^n}{n!} \ .$$

7. Izračunajte $\sum \frac{n+1}{p^n}$, $p > 1$.

8. Za koji $p \in \mathbb{R}$ je red

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^p)!}{(n^n)^p} \ , \quad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \ .$$

konvergentan?

9. Za koji z redovi

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z(z^2+1)^n}{2^n} \ , \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^x \ln^n x}{2^n} \ ,$$

konvergiraju? Izračunajte sumu reda.

§ 1.7 Neprekidnost i diferencijabilnost kompleksnih funkcija

Većina definicija koje se tiču neprekidnosti i diferencijabilnosti kompleksnih funkcija predstavljaju prirodno proširenje pripadnih definicija za funkcije realnih varijabli. Međutim, kao što ćemo vidjeti, neke od ovih definicija stavljaju

mnogo jače restrikcije na funkcije nego li je to bio slučaj u realnoj analizi. U definicijama ćemo za domenu funkcija koristiti podskup skupa kompleksnih brojeva, $S \subset \mathbb{C}$.
Točka $w \in \mathbb{C}$ je **limes** funkcije $f : S \to \mathbb{C}$ u točki $z_0 \in S$ ako

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;:\; \forall\, z \in S \quad \text{t.d.} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(z) - w| < \epsilon \;.$$

i u tom slučaju pišemo

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w \;.$$

Funkcija $f : S \to \mathbb{C}$ je **neprekidna** u točki $z_0 \in S$ ako je

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Kažemo da je funkcija $f : S \to \mathbb{C}$ neprekidna ako je neprekidna u svakoj točki skupa S. Funkcija $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ je neprekidna u točki $z_0 = x_0 + iy_0$ ako i samo ako su funkcije u i v neprekidne u točki (x_0, y_0). Specijalno, za funkciju $f : S \to \mathbb{C}$ kažemo da je **jednoliko** (**uniformno**) **neprekidna** na području S ako

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;:\; \forall\, z_1, z_2 \in S \quad \text{t.d.} \quad |z_1 - z_2| < \delta \;\Rightarrow\; |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$$

Razlika u odnosu na "običnu" neprekidnost je što tamo uz zadani $\epsilon > 0$ broj $\delta > 0$ načelno može ovisiti o točki z; u slučaju jednolike neprekidnosti, uz zadani $\epsilon > 0$ postoji *jedinstveni* $\delta > 0$ za sve točke na području S. Primjer funkcije koja je neprekidna, ali nije uniformno neprekidna je već npr. $f(x) = x^2$ na $x \in \mathbb{R}$.
Funkcija $f : S \to \mathbb{C}$ je **holomorfna** (**derivabilna**) u točki $z \in S$ ako postoji limes

$$f'(z) \equiv \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{1.60}$$

Teorem 1.18. (Cauchy-Riemann) *Neka je $f = u + iv : S \to \mathbb{C}$ funkcija holomorfna u točki $z_0 = x_0 + iy_0 \in S$. Tada su funkcije u i v diferencijabilne u točki (x_0, y_0) i u njoj zadovoljavaju tzv.* **Cauchy-Riemannove uvjete**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \;, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \;. \tag{1.61}$$

Obrat ovog teorema vrijedi tek uz dodatne pretpostavke.

Teorem 1.19. (Looman-Menchoff) *Ako je $f = u + iv : S \to \mathbb{C}$ takva da vrijedi*

a) f je neprekidna na S,

b) parcijalne derivacije u_x, v_x, u_y te v_y su definirane na cijelom S,

c) u i v zadovoljavaju Cauchy-Riemannove jednadžbe na S,

tada je $f(z)$ holomorfna.

Primjer 1.24. Provjerite u kojim točkama su funkcije $f(z) = e^z$ i $g(z) = z^*$ holomorfne.

R. Prvo valja provjeriti CR uvjete, a zatim i to da li su neprekidne parcijalne derivacije realnih i imaginarnih dijelova zadanih funkcija.

$$f(z) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\partial_x u = e^x \cos y = \partial_y v \ , \quad \partial_y u = -e^x \sin y = -\partial_x v$$

Dakle, funkcija f ispunjava CR uvjete, a s obzirom da su ove parcijalne derivacije neprekidne funkcije, f je derivabilna funkcija u svim točkama kompleksne ravnine. Nadalje,

$$g(z) = x - iy = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\partial_x u = 1 \neq \partial_y v = -1 \ , \quad \partial_y u = 0 = -\partial_x v$$

Očigledno, u slučaju funkcije g CR uvjeti nisu ispunjeni niti u jednoj točki kompleksne ravnine, pa g nije nigdje diferencijabilna.

Slijedi primjer fizikalne situacije u kojem je funkcija koja zadovoljava Cauchy-Riemannove uvjete ustvari polje bez rotacije i bez izvora. To je intuitivno jasno, s obzirom da npr. točkasti naboj, ima singularno električno polje.

Primjer 1.25. Ako kompleksnu funkciju $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ zapišemo kao vektorsko polje u dvije dimenzije

$$\mathbf{V} = (V_x, V_y) = (u, -v)\,,$$

pokažite da se Cauchy-Riemannovi uvjeti mogu zapisati kao

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0\,, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0\,.$$

R. Iz prve Cauchy-Riemann jednadžbe slijedi

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0\,,$$

što je definicija rotacije oko osi okomite na kompleksnu ravninu. Druga Cauchy-Riemann jednadžba daje

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0\,.$$

što je definicija divergencije polja $\mathbf{V}$.

Za funkciju f kažemo da je **analitička** u točki z_0 ako je holomorfna u nekoj *okolini* točke z_0. Funkciju f koja je analitička na *cijelom* skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ obično zovemo **cijela** funkcija. Primjeri cijelih funkcija su svi polinomi, zatim e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, itd. Skup analitičkih funkcija na skupu $S \subset \mathbb{C}$ označavamo s $\mathscr{H}(S)$.

Teorem 1.20. (Liouville) *ako je funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cijela ($f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$) i omeđena (postoji $M > 0$ takav da vrijedi $|f(z)| < M$ za svaki $z \in \mathbb{C}$), tada je f nužno konstantna funkcija ($f(z) = c \in \mathbb{C}$ za svaki $z \in \mathbb{C}$).*

Ovdje valja uočiti jednu bitnu razliku spram diferencijabilnosti funkcija realne varijable. Dok kod funkcija realne varijable analitičnost zahtijeva da pripadaju klasi C^∞ odnosno da su derivabilne proizvoljno puta, kod funkcija kompleksne varijable imamo bitno različitu situaciju: ako je funkcija derivabilna na nekoj okolini, "automatski" je i analitička! Intuitivno, derivabilnost u kompleksnoj ravnini je mnogo jači zahtjev jer promatramo limes derivacije "iz svih smjerova" oko dane točke.
Promotrimo još jedan aspekt derivabilnosti kompleksnih funkcija. Poprilično neintuitivna činjenica je da među funkcijama realne varijable postoje neprekidne, a nigdje diferencijabilne funkcije. Prvi takav primjer otkrio je Karl Weierstrass 1872. godine (njemu u čast nazvana Weierstrassova funkcija),

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \ , \quad 0 < a < 1 \ , \ ab > 1$$

S kompleksnim brojevima na raspolaganju imamo daleko manje egzotične primjere s ovim svojstvom, kao što će pokazati naredni primjer.

Primjer 1.26. Pokažite da je $f(z) = |z|$ neprekidna, ali nigdje holomorfna funkcija.

R. Za dani $\epsilon > 0$ odaberemo $\delta > 0$, takav da je $\delta < \epsilon$. Tada iz $|z - z_0| < \delta$ i nejednakosti trokuta slijedi

$$|f(z) - f(z_0)| = \big||z| - |z_0|\big| < |z - z_0| < \delta < \epsilon$$

pa je f neprekidna u z_0. Kako je z_0 bila proizvoljna točka iz $\mathbb{C}$, f je neprekidna na cijelom $\mathbb{C}$ (štoviše, f je i uniformno neprekidna jer izbor broja δ ne ovisi o točki z_0). Sada provjeravamo CR uvjete:

$$u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \quad v(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Jedina točka u kojoj bi mogao biti zadovoljen uvjet je $z = 0$, međutim, već znamo iz svojstava funkcije realne varijable $f(x) = |x|$ da $f(z) = |z|$ duž realne osi nije diferencijabilna u ishodištu. Zaključak je da promatrana funkcija nije diferencijabilna u niti jednoj točki u $\mathbb{C}$.

Za funkciju $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je **harmonijska funkcija** ako zadovoljava Laplaceovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{1.62}$$

Ako je $f : S \to \mathbb{C}$ analitička funkcija, njeni realni i imaginarni dio, $u(x, y)$ i $v(x, y)$, su harmonijske funkcije. Naime, upotrebom CR uvjeta slijedi

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \partial_x \partial_y v - \partial_y \partial_x v = 0 \ , \quad \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = -\partial_x \partial_y u + \partial_y \partial_x u = 0$$

Ova činjenica nam omogućuje uspostavljanje veze između fizikalnih problema opisanih diferencijalnom jednadžbom (1.62) i analitičkih kompleksnih funkcija!

1.7 ♣ ZADACI

1. Ispitajte analitičnost narednih funkcija:

$$a) \ \frac{1}{z} \ , \quad b) \ |z|^2 \ , \quad c) \ \sin z \ , \quad d) \ \mathrm{th}\, z$$

2. Pokažite da analitička funkcija f zadovoljava

$$\frac{df}{dz^*} = 0$$

Ponekad se promatraju i tzv. **antiholomorfne** funkcije, za koje vrijedi

$$\frac{df}{dz} = 0$$

Pokažite da antiholomorfne funkcije zadovoljavaju CR uvjete s "pogrešnim" predznacima. Pokažite da je f^* antiholomorfna funkcija ako je f holomorfna funkcija.

3. Ako su f_1 i f_2 analitičke funkcije, pokazite da je i funkcija $f_1 \cdot f_2$ analitička funkcija.

4. Ako analitičke funkcije $f, g : S \to \mathbb{C}$ zadovoljavaju $f'(z) = g'(z)$ za sve $z \in S$, tada se one razlikuju za konstantu.

5. Pokažite da Cauchy-Riemannovi uvjeti u polarnim koordinatama (r, ϕ) glase:

$$\partial_\phi u = -r\, \partial_r v \ , \quad r\, \partial_r u = \partial_\phi v$$

6. Promotrite slijedeću funkciju

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{z^4}) \ , & z \neq 0 \\ 0 \ , & z = 0 \end{cases}$$

Dokažite da ova funkcija zadovoljava CR uvjete u svakoj točki kompleksne ravnine. Nadalje, pokažite da derivacija ove funkcije u točki $z = 0$ duž polupravca $r \exp(i\pi/4) = x + ix$ divergira! Zbog čega ova funkcija ipak nije derivabilna u ishodištu?

7. Pronađite grešku u slijedećem zaključivanju: 1) ograničena cijela funkcija je nužno konstanta, 2) $\sin z$ je ograničena funkcija, 3) $\sin z$ je cijela funkcija, 4) slijedi da je $\sin z$ konstantna funkcija?!

§ 1.8 Taylorov i Laurentov razvoj

Taylorov razvoj

Teorem 1.21. (Taylor) *Ako je funkcija $f(z)$ analitička u točki z_0, onda u okolini točke z_0 se može prikazati u obliku reda*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \ , \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \ , \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Taylorov razvoj je razvoj funkcije u red potencija, gdje su koeficijenti dani s c_n.

Teorem 1.22. (Abel) *Ako Taylorov red konvergira za neki $z = z_1 \in \mathbb{C}$, tada je on apsolutno konvergentan za svaki $z \in \mathbb{C}$ za koji vrijedi $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Obratno, ako Taylorov red divergira za neki $z = z_1 \in \mathbb{C}$, tada on divergira za svaki $z \in \mathbb{C}$ za koji vrijedi $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.*

Po Abelovom teoremu **područje konvergencije** je otvoreni krug sa središtem u točki z_0, $\mathcal{K} = \{z \,||z - z_0| < R\}$. Polumjer R je **polumjer konvergencije** reda potencija. Red je apsolutno konvergentan na ovom krugu i uniformno konvergentan na svakom njegovom kompaktnom podskupu, pa je dozvoljeno derivirati i integrirati "član po član" u svakoj točki unutar radijusa konvergencije,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} \ , \quad z \in \mathcal{K}$$

$$\int_{z_0}^{z} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \ , \quad z \in \mathcal{K}$$

Polumjer konvergencije može se odrediti iz koeficijenata, jednom od formula

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \ , \quad \frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

Na samoj kružnici $|z - z_0| = R$ red može divergirati, ali i konvergirati.

Razvoji nekih važnijih funkcija (oko nule):

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ , \quad |z| < \infty \ ,$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \ , \quad |z| < \infty \ ,$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} , \quad |z| < \infty ,$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} , \quad |z| < 1 ,$$

$$(1+z)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!} z^n , \quad |z| < 1 ,$$

gdje je za višeznačne funkcije dan razvoj glavne grane.

Primjer 1.27. Odredite polumjer konvergencije za red potencija $\sum \frac{nz^n}{3^n}$.

R. Ovdje ilustriramo kako prva formula za polumjer konvergencije funkcionira. Ako uzmemo $c_n = nz^n/3^n$, imamo red s kompleksnim koeficijentima koji ovise o nekoj varijabli z (odnosno red funkcija). Konvergenciju tog reda možemo provjeriti pomoću npr. testa usporedbom

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \left| \frac{z^{n+1}}{z^n} \right| \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{|z|}{3} .$$

Ovaj red će konvergirati kada je $L < 1$ odnosno kada je $|z| < 3$, pa je polumjer konvergencije $R = 3$.

Primjer 1.28. Pronađite polumjer konvergencije reda

$$1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3^2} + \frac{z^3}{2^3} + \frac{z^4}{3^4} + \frac{z^5}{2^5} + \dots$$

R. Dan je Taylorov razvoj oko $z = 0$ s parnim koeficijentima $c_{2n} = 1/3^{2n}$, te neparnim $c_{2n+1} = 1/2^{2n+1}$. Po korijenskom testu imamo

$$\left| \frac{1}{3^{2n}} \right|^{1/2n} = \frac{1}{3} , \quad \left| \frac{1}{2^{2n+1}} \right|^{1/(2n+1)} = \frac{1}{2},$$

pa je $1/R = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1/2$. Red konvergira za $|z| < 2$.

Primjer 1.29. Izračunajte sumu reda za $|z| < 1$.

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} nz^n , \quad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

R.

a) Koristeći teorem o diferencijabilnosti uniformno konvergentnog reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz} z^n = z \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} z^n = z \frac{d}{dz} \left(-1 + \frac{1}{1-z} \right)$$
$$= z \frac{d}{dz} \frac{z}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

b) Koristeći teorem o integrabilnosti uniformno konvergentnog reda:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z u^{2n} du = \int_0^z du \sum_{n=0}^{\infty} u^{2n} = \int_0^z \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}.$$

Laurentov razvoj

Teorem 1.23. (Laurent) *Neka su $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ dvije koncentrične kružnice polumjera R_1 i R_2, gdje je $R_1 > R_2$, respektivno, i sa središtem u z_0. Ako je $f(z)$ analitička na kružnom vijencu $\mathcal{R} = \{z \,|\, R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2\}$, onda se u okolini točke $|z_0| < R_2$ može prikazati u obliku reda*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{1.63}$$

gdje su koeficijenti c_n za svaki $n \in \mathbb{Z}$ dani integralom po $\mathcal{C}$, pozitivno orjentiranoj zatvorenoj krivulji u $\mathcal{R}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz \tag{1.64}$$

Taylorov razvoj oko neke točke z_0 vrijedi samo do najbliže ne–analitičke točke. Preko ne–analitičke točke možemo ići pod uvjetom da koristimo Laurentov razvoj. **Glavni dio** razvoja čine svi članovi s negativnim potencijama. Ako svi koeficijenti uz negativne potencije iščezavaju, Laurentov razvoj postaje Taylorov razvoj.

Primjer 1.30. Razvijte $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$ u Laurentov red za

$$\text{a) } 1 < |z| < 2 \,, \quad \text{b) } |z| > 2 \,, \quad \text{c) } 0 < |z+1| < 1 \,, \quad \text{d) } |z| < 1.$$

R.

a) U kružnom disku $1 < |z| < 2$ $f(z)$ je analitička. Koeficijente Laurentovog razvoja pronaći ćemo pomoću geometrijskog reda

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots,$$

koji konvergira za $|z| < 1$. Ako sad rastavimo $f(z) = -\frac{1}{3}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{z-2}$, slijedi

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{3z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = -\frac{1}{3z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \dots\right),$$

$$\frac{1}{3}\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{6}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \dots\right).$$

Pa je:

$$f(z) = \dots - \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{3z^2} - \frac{1}{3z} - \frac{1}{6} - \frac{z}{12} - \frac{z^2}{24} + \dots$$

b) Kako za $|z| > 2$ vrijedi $|2/z| < 1$ onda

$$\frac{1}{3}\frac{1}{z-2} = \frac{1}{3z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{3z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\dots\right),$$

dok razvoj funkcije $\frac{1}{z+1}$ ostaje isti. Tada Laurentov red sadrži samo negativne potencije

$$f(z) = \dots + \frac{3}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2}$$

c) Umjesto razvoja oko ishodišta, sada razvijamo oko točke -1. Uvedimo stoga $u = z+1$. Imamo $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{u}$, te

$$\frac{1}{3}\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{u}{3}} = -\frac{1}{9}\left(1+\frac{u}{3}+\frac{u^2}{9}+\dots\right),$$

što vrijedi za $|u| < 3$. Pa je

$$f(z) = -\frac{1}{3u} - \frac{1}{9} - \frac{u}{27} - \frac{u^2}{81} + \dots = -\frac{1}{3}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{9} - \frac{z+1}{27} - \frac{(z+1)^2}{81} + \dots .$$

d) U ovom slučaju

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{3}(1 - z + z^2 - \dots),$$

dok je $\frac{1}{z-2}$ isti kao u a). Laurentov razvoj sadrži samo pozitivne koeficijente

$$f(z) = -\frac{1}{2} + \frac{z}{4} - \frac{3z^2}{8} + \dots$$

Klasifikacija singulariteta

Singulariteti kompleksnih funkcija su točke u kojima funkcija nije analitička. Ako je singularitet **izoliran**, onda je oko njega moguć Laurentov razvoj. Razne tipove izoliranih singulariteta razlikujemo po tome kakav im je Laurentov razvoj:

1. Ako $c_{-n} \neq 0$, za neki konačni $n > 0$, a ostali članovi iščezavaju, onda je z_0 **pol** n-**tog reda**. Ako je $n = 1$ z_0 zovemo još **jednostavan pol**.

2. Ako $f(z)$ nije definirana u z_0 ali $\lim_{z\to z_0} f(z)$ postoji, onda je z_0 **uklonjivi singularitet**.

3. Singularitet koji nije pol ili uklonjivi singularitet naziva se **bitni singularitet**. Glavni dio Laurentovog razvoja ima beskonačno mnogo članova.

Primjer singulariteta koji nije izoliran je točka grananja: javlja se kod višeznačnih funkcija kao npr. $\sqrt{z}$ ili $\ln z$. Svaka grana za sebe čini analitičku funkciju, tj. na svakoj je moguć Taylorov razvoj. Ali Laurentov razvoj iziskuje da funkcija bude analitička u čitavom kružnom vijencu, što kod $\sqrt{z}$ ili $\ln z$ nije moguće zbog prisutnosti reza. Nadalje, moguća je i situacija u kojoj je funkcija u tolikoj mjeri singularna da se u ϵ-okolini nekog singulariteta z_0 nalazi bar još jedan, odnosno z_0 nije izoliran.
Analitičko ponašanje neke funkcije $f(z)$ u beskonačnosti istražujemo pomoću supstitucije $z = 1/u$. Problem se tako svodi na proučavanje analitičkog ponašanja $f(1/u)$ kada $u \to 0$.

Primjer 1.31. Pronađite Laurentov razvoj oko naznačenog singulariteta za svaku od navedenih funkcija $f(z)$. Klasificirajte singularitete i pronađite područje konvergencije reda.

a) $\dfrac{1}{z^2(z-3)^2}$; $z=3$, b) $\dfrac{e^{2z}}{(z^2-1)(z+1)^2}$; $z=-1$, c) $\dfrac{1}{\ln(1-z)}$; $z=0$,

d) $(z+i)\sin\left(\dfrac{1}{z+i}\right)$; $z=-i$, e) $\dfrac{2-z^2-2\cos z}{z^4}$; $z=0$.

R.

a) Uz supstituciju $u=z-3$ imamo

$$f(z)=\frac{1}{u^2(u+3)^2}=\frac{1}{9u^2\left(1+\frac{u}{3}\right)^2}=\frac{1}{9u^2}\left(1-\frac{2}{3}u+\frac{1}{3}u^2-\frac{4}{27}u^3+\dots\right),$$

pa je

$$f(z)=\frac{1}{9}\frac{1}{(z-3)^2}-\frac{2}{27}\frac{1}{z-3}+\frac{1}{27}-\frac{4}{243}(z-3)+\dots .$$

Točka $z=3$ je pol 2. reda. Red konvergira u području $0<|z-3|<3$.

b) Napravimo supstituciju $u=z+1$. Tada $f(z)=\frac{1}{e^2u^3}\frac{e^{2u}}{u-2}$. Vrijedi

$$\frac{e^{2u}}{u-2}=-\frac{1}{2}-\frac{5u}{4}-\frac{13u^2}{8}-\frac{71u^3}{48}-\frac{103u^4}{96}-\dots ,$$

pa je

$$f(z)=-\frac{1}{2e^2}\frac{1}{u^3}-\frac{5}{4e^2}\frac{1}{u^2}-\frac{13}{8e^2}\frac{1}{u}-\frac{71}{48e^2}-\frac{103u}{96e^2}-\dots .$$

Točka $z=-1$ je pol 3. reda. Red konvergira unutar kružnice $|z+1|<2$.

c) Po L' Hospitalovom pravilu

$$\lim_{z\to0}\frac{z}{\ln(1-z)}=\lim_{z\to0}\frac{1}{-\frac{1}{1-z}}=-1 ,$$

pa je $z=0$ pol 1. reda. Znamo $\ln(1-z)=-(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\dots)$, pa je

$$\frac{1}{\ln(1-z)}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}+\dots}=-\frac{1}{z}\Bigg[1-\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}+\frac{z^3}{4}+\dots\right)+$$
$$+\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}+\dots\right)^2-\left(\frac{z}{2}+\dots\right)^3+\dots\Bigg] ,$$

gdje smo u geometrijskom redu zadržali samo članove do 3. potencije. Sređivanje izraza vodi na

$$f(z)=-\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\frac{z}{12}+\frac{z^2}{24}+\dots .$$

Područje konvergencije reda je $|z|<1$.

d) Uz supstituciju $u=z+i$ imamo

$$u\sin\frac{1}{u}=u\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{3!}\frac{1}{u^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{u^5}-\dots\right)=1-\frac{1}{6}\frac{1}{(z+i)^2}+\frac{1}{120}\frac{1}{(z+i)^4}-\dots .$$

Točka $z=-i$ je bitni singularitet. Red konvergira za $|z+i|<\infty$.

e) Razvojem $\cos z$ oko $z = 0$ dobivamo

$$f(z) = \frac{1}{z^4}\left[2 - z^2 - 2\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)\right] = -\frac{1}{12} + \frac{z^2}{360} - \dots ,$$

čime zaključujemo da je $z = 0$ uklonjivi singularitet. Red konvergira za $|z| < \infty$

Primjer 1.32. Klasificirajte singularitete navedenih funkcija, te istražite ponašanje funkcije u beskonačnosti.

$$\text{a) } f(z) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} , \quad \text{b) } f(z) = \frac{1}{\cos\frac{1}{z}} , \quad \text{c) } f(z) = \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right) .$$

R.

a) Provjerimo prvo da li je $z = 0$ točka grananja. Odaberimo $0 \le \arg(z) < 2\pi$, te granu korijena koja daje $\sqrt{1} = 1$. Tada

$$f(e^{i\delta}) = \frac{\sin e^{i\delta/2}}{e^{i\delta/2}} = \frac{\sin e^{i\delta}}{e^{i\delta}} \to \sin 1,$$

za $\delta \to 0^+$. Isto tako

$$f(e^{i(2\pi-\delta)}) = \frac{\sin e^{i\pi}e^{-i\delta/2}}{e^{i\pi}e^{-i\delta/2}} = \frac{\sin(-1)e^{-i\delta}}{-e^{-i\delta}} \to \sin 1.$$

pa je $z = 0$ uklonjivi singularitet. Nakon transformacije $u = 1/z$ vidimo da je

$$\lim_{u\to 0}\sqrt{u}\sin\frac{1}{\sqrt{u}} = 0 .$$

pa je i točka u beskonačnosti uklonjivi singularitet.

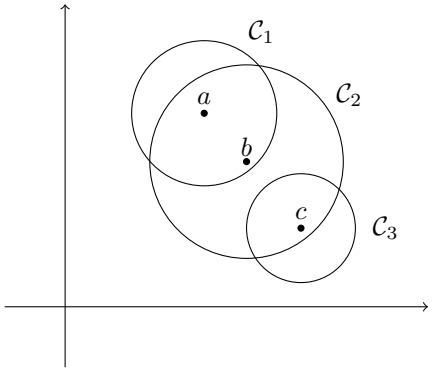
b) Funkcija ima singularitete u $z = 0$, te $z_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$. Uz korištenje L' Hospitalovog pravila

$$\lim_{z\to z_k}(z - z_k)f(z) = \lim_{z\to z_k}\frac{z - z_k}{\cos(1/z)} = \lim_{z\to z_k}\frac{z^2}{\sin(1/z)} = \frac{4(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2},$$

vidimo da su z_k polovi 1. reda. S druge strane, $z = 0$ je bitni singularitet funkcije $\cos(1/z)$, pa je i bitni singularitet $f(z)$. No u ovom slučaju, kako vrijedi i $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$, to je primjer neizoliranog singulariteta. Točka u beskonačnosti je obična točka.

c) $g(z) = \sin\frac{1}{z}$ ima bitni singularitet u $z = 0$, te nultočke u $z_k = 1/k\pi$. Kako je $f(z) = \sin\frac{1}{g(z)}$, z_k su bitni singulariteti $f(z)$. Bitni singularitet u nuli nije izoliran. Točka $z \to \infty$ je bitni singularitet.

Neobična svojstva bitnih singulariteta sadržana su u slijedeća dva teorema.



Slika 1.9: Područja konvergencije Laurentov razvoja.

Teorem 1.24. (Casorati–Weierstrass) *U danoj ϵ–okolini izoliranog bitnog singulariteta inače analitička funkcija može doći prozivoljno blizu bilo kojeg kompleksnog broja.*

Teorem 1.25. (Picard) *U ϵ–okolini izoliranog bitnog singulariteta inače analitička funkcija može poprimiti bilo koju vrijednost osim možda jedne, beskonačno mnogo puta.*

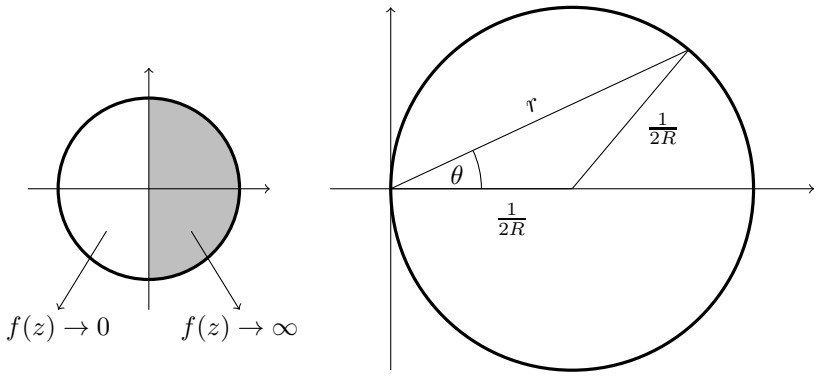
Ako znamo funkciju na jednom području na kojem je ona analitička možemo njenu definiciju proširiti da uključuje i područje u kojem nije bila prvotno definirana. Ako ispada da je funkcija u tom novom području također analitička onda to zovemo **analitičkim produljenjem**. Primjeri takvih funkcija su npr. polinomi, trigonometrijske funkcije, eksponencijalna funkcija koje su prije bile definirane na $\mathbb{R}$, a sad na cijelom $\mathbb{C}$.
Za primjer uzmimo funkciju kao na slici 1.9 koja ima Taylorov razvoj oko a s područjem konvergencije $\mathcal{C}_1$. Recimo da u točci b na kružnici koja obuhvaća $\mathcal{C}_1$ funkcija ima izolirani singularitet. Oko nje možemo raditi Laurentov razvoj. Nema *a priori* razloga da njegovo područje konvergencije $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1$. Time smo dobili funkciju definiranu na većem području $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Procedura je dalje jasna: dobiveni Laurentov razvoj će vrijediti do izolirane singularne točke c, oko koje pak možemo napraviti novi Laurentov razvoj itd. Ako ovo procedurom ustanovimo da postoji cijeli skup singulariteta na nekom području, tj. da oni više nisu izolirani, u tom slučaju dolazimo do **prirodne granice** funkcije.

Primjer 1.33. Pokažite da funkcija $f(z) = e^{1/z}$ može poprimiti bilo koju vrijednost osim jedne u ϵ-okolini $z = 0$.

R. Točka $z = 0$ je izolirani bitni singularitet. U polarnim koordinatama $z = re^{i\theta}$ imamo

$$f(z) = \exp\left(\frac{\cos\theta}{r}\right) \exp\left(-i\frac{\sin\theta}{r}\right) ,$$

pa je $|f(z)| = \exp(r/\cos\theta)$. Ovo pokazuje da je dovoljno promatrati samo desnu poluravninu, $\cos\theta > 0$, s obzirom da kako idemo u $r \to 0$ imamo $f(z) \to \infty$. S



Slika 1.10: Na lijevoj slici prikazana su područja koja će dati $f(z) \to 0$ kako $r \to 0$, odnosno $f(z) \to \infty$ kako $r \to 0$. Na desnoj strani prikazana je parametrizacija (stereografska projekcija) desne poluravnine.

druge strane, za $\cos\theta < 0$ imamo $f(z) \to 0$. Parametrizirajmo sad desnu poluravninu stereografskom projekcijom kao na slici 1.10: zanima nas ponašanje funkcije kako variramo kružnicu polumjera $1/2R$. Vrijedi $r = \frac{\cos\theta}{R}$, pa je

$$f(z) = e^R e^{-iR\mathrm{tg}\theta} \ .$$

Slijedi da kako mijenjamo R, $|f(z)|$ može biti bilo što osim nule. Obrnuto, ako fiksiramo R, a mijenjamo θ onda $\arg(f(z)) = -R\mathrm{tg}\theta$ može poprimiti bilo koju vrijednost na jediničnoj kružnici beskonačno mnogo puta. Razlog tomu je što je kodomena $\mathrm{tg}\theta$ skup $\mathbb{R}$.

Primjer 1.34. Dokažite da red

$$1 + z + z^2 + z^4 + \cdots = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

ne može biti analitički produljen iza $|z| = 1$.

R. Red očito konvergira za $|z| < 1$. Ako nazovemo $f(z) = 1 + z + z^2 + z^4 + \ldots$ vrijedi $f(z) = z + f(z^2)$. Za $z = 1$ ova jednakost daje $f(1) = 1 + f(1)$, pa ova jednadžba može biti zadovoljena jedino ako je $f(1) = \infty$. Za $z = -1$ vrijedi $f(-1) = -1 + f(1)$, pa je i $f(-1) = \infty$. Na dalje, uz $z \to z^2$ vrijedi i $f(z) = z + z^2 + f(z^4)$. Sada možemo uzeti $z = \pm i$ i zaključiti da je $f(\pm i) = \infty$. Iteracijom ovog postupka dobivamo kako u svim točkama koje zadovoljavaju jednadžbu $z^n = 1$, $f(z)$ ima singularitet. Za $n \to \infty$ ta rješenja iscrtavaju kružnicu $|z| = 1$, koja je onda prirodna granica $f(z)$.

1.8 ♣ ZADACI

1. Pronađite polumjer konvergencije slijedećih redova funkcija:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \ , \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i\pi)^n}{(n+1)(n+2)} \ ,$$

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n \ , \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1) z^n \ .$$

   Diskutirajte konvergenciju reda na rubu polumjera konvergencije.

2. Razvijte $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ u Laurentov red za

$$\text{a) } 1 < |z| < 3 \ , \quad \text{b) } |z| > 3 \ , \quad \text{c) } 0 < |z+1| < 2 \ , \quad \text{d) } |z| < 1 \ .$$

3. Razvijte

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z+1)^2}$$

   u Laurentov red oko $z = 2$.

4. Pronađite Laurentov razvoj oko naznačenog singulariteta za svaku od navedenih funkcija. Klasificirajte singularitete i pronađite područje konvergencije reda.

$$\text{a) } \frac{z}{(z+1)(z+2)} \ ; \ z = -1 \ , \quad \text{b) } (z-3) \sin \frac{1}{z+2} \ ; \ z = -2 \ ,$$

$$\text{c) } \frac{z - \sin z}{z^3} \ ; \ z = 0 \ , \quad \text{d) } \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} \ ; \ z = 1 \ , \quad \text{e) } \frac{1}{z^2(z-3)^2} \ ; \ z = 3 \ .$$

5. Klasificirajte singularitete navedenih funkcija, te istražite njihovo ponašanje u beskonačnosti.

$$\text{a) } \mathrm{tg} z \ , \quad \text{b) } \sin \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \ , \quad \text{c) } z^2 e^{\frac{1}{z^2}} \ , \quad \text{d) } \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} \ , \quad \text{e) } e^{z - \frac{1}{z}} \ .$$

6. Pokažite da je $|z| = 1$ prirodna granica za red

$$z^{1!} + z^{2!} + z^{3!} + \dots \ .$$

§ 1.9 Integriranje kompleksnih funkcija

Funkcija kompleksne varijable $f(z)$ integrira se po određenoj krivulji u kompleksnoj ravnini ili **putu**, koji može biti **zatvoren**, **otvoren** te koji može i ne mora presijecat sam sebe. Ako put ne presijeca sam sebe onda se takav put zove **Jordanov**.

Za integrale funkcija kompleksne varijable vrijede uobičajeni teoremi kao i za obične integrale, kao npr. linearnost operacije integracije. No s obzirom na bogatiju strukuru funkcija kompleksne varijable, nije neobično da se pri integriranju takvih funkcija javljaju dodatna pravila.

Cauchyeva integralna formula i vezani teoremi

Lema 1.26. *Neka je $\mathcal{C} : [a, b] \to S \in \mathbb{C}$ po dijelovima gladak put, te neka je $f : S \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Tada vrijedi*

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)dz \right| \leq l(\mathcal{C}) \cdot \max_{z \in \mathcal{C}} |f(z)| \,, \tag{1.65}$$

gdje je $l(\mathcal{C})$ duljina krivulje $\mathcal{C}$.

Svrha ove leme je da nam omogućava da ocjenimo neki integral koji bi egzaktno bio npr. teško rješiv. Alternativno, moguće je da nas njegova egzaktna vrijednost niti ne zanima, već samo da li u npr. određenom limesu iščezava. Tada je očito dovoljno ocijeniti da li njegova gornja granična vrijednost iščezava.

Teorem 1.27. (Cauchy-Goursat) *Neka je $f : S \to \mathbb{C}$ analitička funkcija na području S i na njegovoj granici $\mathcal{C}$. Ako je, $\mathcal{C}$ zatvoren, po dijelovima gladak put u S, tada vrijedi*

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ dz \ = \ 0 \,. \tag{1.66}$$

Korisna posljedica Cauchy-Goursatovog teorema je da deformacija puta integracije u kompleksnoj ravnini ne mijenja vrijednost integrala dok god je funkcija analitička u danom području deformacije. Analognu fizikalnu situaciju susrećemo u elektrostatici gdje integral električnog polja po zatvorenoj površini je nula dok god se unutar površine ne nalazi naboj.

Primjer 1.35. Korištenjem Gaussovog i Stokesovog teorema u dvije dimenzije pokažite da je integralna forma Cauchy-Riemannovih jednadžbi upravo (1.66).

R. Krećemo od Cauchy-Riemannovih jednadžbi zapisanih pomoću vektorskog polja $\mathbf{V} = (u, -v)$ izvedenih u primjeru 1.25

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0 \,, \qquad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \,.$$

Ako integriramo drugi izraz po zatvorenoj plohi $S(\mathcal{C})$ koju obuhvaća krivulja $\mathcal{C}$ imamo

$$\int_{S(\mathcal{C})} (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} \ ,$$

gdje smo u drugom koraku koristili Stokesov teorem da bi zapisali integral po površini pomoću integrala na rubu. Infinitezimalni element $d\mathbf{l}$ usmjeren je duž krivulje.

Gaussov teorem koristimo tako da integriramo prvu jednadžbu po površini, ali koja u ovom slučaju nije usmjerena

$$\int_{S(\mathcal{C})} \nabla \cdot \mathbf{V} \, dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}' \ ,$$

gdje smo sada element površine nazvali dA. Linijski element $d\mathbf{l}'$ usmjeren je okomito na krivulju u danoj točci krivulje. To znači da su $d\mathbf{l} = (dx, dy)$ i $d\mathbf{l}' = (dx', dy')$ povezani rotacijom za kut $\pi/2$

$$\begin{pmatrix} dx' \\ dy' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \\ -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} \ .$$

Imamo

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{C}} (udx - vdy) = 0 \ ,$$
$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}' = \oint_{\mathcal{C}} (udy + vdx) = 0 \ .$$

S druge strane

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = \oint_{\mathcal{C}} (dx + idy)(u + iv) = \oint_{\mathcal{C}} (udx - vdy) + i \oint_{\mathcal{C}} (udy + vdx) = 0 \ ,$$

gdje smo u zadnjem koraku koristili gornje jednadžbe.

Teorem 1.28. (Cauchyjeva integralna formula) *Neka je $f : S \to \mathbb{C}$ analitička na području S i njegovoj granici $\mathcal{C}$. Ako je, $\mathcal{C}$ zatvoren, po dijelovima gladak put u S, tada za bilo koju točku $z_0 \in S$ vrijedi*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz \ .$$

Cauchyeva integralna formula nam kaže da je poznavanje analitičke funkcije na rubu dovoljno da znamo njeno ponašanje bilo gdje unutar te krivulje.
Dokaz Cauchyeve integralne formule može se ilustrirati stiskanjem krivulje $\mathcal{C}$ oko točke z_0. Cauchy - Goursatov teorem garantira da se pritom vrijednost integrala ne mijenja. Ako je krivulja infinitezimalna, onda unutar tog područja smijemo zamijeniti $f(z) \to f(z_0)$. Tada preostaje izvrijedniti

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - z_0} \ ,$$

što je trivijalno ako promatramo infinitezimalnu kružnicu polumjera ϵ. Uz supstituciju $z - z_0 = \epsilon e^{i\theta}$, imamo

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - z_0} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \ ,$$

što daje traženi rezultat.

Slijedeći teorem ilustrira generalizaciju ideje Cauchyeve integralne formule na derivacije funkcije $f(z)$.

Lema 1.29.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \ .$$

Gornja formula predstavlja alternativan način dobivanja koeficijenata Taylorovog razvoja. Zapravo, u prethodnom poglavlju smo vidjeli da ona opisuje i koeficijente Laurentovog razvoja, odnosno

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \ ,$$

za $n \in \mathbb{Z}$.

Teorem o reziduumu

Koeficijent c_{-1} naziva se **reziduum**, te je od posebnog značaja. Njegovo poznavanje omogućava rješavanje integrala po nekom zatvorenom putu $\mathcal{C}$

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi i c_{-1} \ ,$$

gdje $f(z)$ više nije nužno analitička unutar $\mathcal{C}$.

Uobičajena oznaka za reziduum funkcije $f(z)$ u točci z_0 je $\mathrm{Res}\,(f, z_0)$. U slučaju da se unutar integracijske krivulje nalazi više od jednog izoliranog singulariteta, z_j, imamo slijedeću formulu

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\, dz \ = \ 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}\,(f, z_j) \ . \tag{1.67}$$

Ova tvrdnja se lako dokaže, jer pomoću Cauchy-Goursatovog teorema moguće je integral po $\mathcal{C}$ zapisati kao sumu integrala po krivuljama $\mathcal{C}_j$ gdje svaka od njih obuhvaća određeni z_j. Za reziduum pola reda m postoji posebna formula:

Teorem 1.30. *Reziduum pola reda m funkcije $f(z)$ dan je formulom*

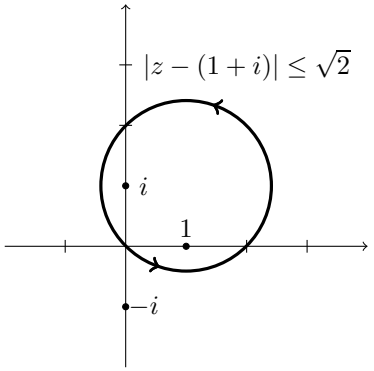
$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z)\right] \ . \tag{1.68}$$

Lema 1.31. *Ako se funkcija može napisati u obliku kvocijenta,*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)} \ ,$$

gdje su $\phi(z)$ i $\psi(z)$ analitičke funkcije oko $z = z_0$ i z_0 je jednostavna nul-točka funkcije $\psi(z)$ (dakle, $\psi(z_0) = 0$ i $\psi'(z_0) \neq 0$), tada je

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \frac{\phi(z_0)}{\psi'(z_0)} \tag{1.69}$$



Slika 1.11: Integracijska krivulja s pripadnim polovima.

Prvo ćemo razmotriti integrale po jednostavnim zatvorenim pozitivno orjentiranim krivuljama u kompleksnoj ravnini. Njihovu vrijednost računamo direktnom primjenom teorema o reziduumima - sumu reziduuma svih singulariteta obuhvaćenih krivuljom pomnožimo s $2\pi i$. U zadacima će se često koristiti skraćeni zapis $\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \mathrm{Res}\,(z_0)$.

Primjer 1.36. Izračunajte

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2} \ , \quad \mathcal{C} \equiv \{z; |z-(1+i)|^2 = 2\} \ .$$

R. Integracijska krivulja je kružnica polumjera $\sqrt{2}$ centrirana oko točke $1+i$. Neanalitičke točke podintegralne funkcije su $z = \pm i$ (polovi 1. reda), te $z = 1$ (pol 2. reda), od kojih se samo $z = i$, te $z = 1$ nalaze unutar integracijske krivulje (vidi sliku 1.11). Pripadni reziduumi se mogu izračunati po danoj formuli

$$\mathrm{Res}\,(i) = \lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z^2+1)(z-1)^2} = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+i)(z-1)^2} = \frac{1}{4} \ ,$$

$$\mathrm{Res}\,(1) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)^2}{(z^2+1)(z-1)^2}\right] = -\lim_{z\to 1} \frac{2z}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2} \ .$$

Primjena teorema o reziduumu nam daje traženi integral

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2} = 2\pi i \left[\mathrm{Res}\,(i) + \mathrm{Res}\,(1)\right] = -\frac{i\pi}{2} \ .$$

Primjer 1.37. Izračunajte

$$\oint_{\mathcal{C}} = \frac{\mathrm{ctg}\, z}{z(z-1)}\, dz \ , \quad \mathcal{C} \equiv \{z; |z| = 2\} \ .$$

R. Singulariteti podintegralne funkcije su $z = 0, 1$, te $z = k\pi$, gdje je $k \in \mathbb{Z}$, s tim da je točka $z = 0$ pol 2. reda, dok su sve ostale točke polovi 1. reda. Jedino se $z = 0, 1$ nalaze unutar integracijske krivulje. Reziduumi funkcije u tim točkama su

$$\mathrm{Res}\,(1) = \lim_{z\to 1} \frac{\cos z}{z \sin z} = \mathrm{ctg}\, 1 \ ,$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(0) &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z\cos z}{(z-1)\sin z}\right]\\ &= \lim_{z\to 0}\left[\frac{\cos z}{\sin z}\frac{1}{z-1}-\frac{z}{z-1}\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}-\frac{z}{z-1}-\frac{z}{(z-1)^2}\frac{\cos z}{\sin z}\right]\\ &= -\lim_{z\to 0}\frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z}-1 = -\lim_{z\to 0}\frac{z}{2\cos z}-1 = -1\ .\end{aligned}$$

Slijedi

$$\oint_{\mathcal{C}}\frac{\operatorname{ctg} z}{z(z-1)}\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(1)+\operatorname{Res}(0)\right] = 2\pi i(\operatorname{ctg} 1 - 1)\ .$$

Primjer 1.38. Izračunajte

$$\oint_{\mathcal{C}} ze^{1/z}dz\ , \quad \mathcal{C}\equiv\{z;|z|=2\}\ .$$

R. Funkcija ima bitni singularitet u $z=0$ koji se nalazi unutar integracijske krivulje $\mathcal{C}$. Integral je stoga jednak

$$\oint_{\mathcal{C}} ze^{1/z}dz = 2\pi i\operatorname{Res}(0)\ .$$

Iz Laurentovog razvoja podintegralne funkcije

$$f(z) = \cdots\frac{1}{3!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z}+1+z\ ,$$

možemo očitati reziduum $\operatorname{Res}(0)=1/2$. Rješenje je stoga

$$\oint_{\mathcal{C}} ze^{1/z}dz = i\pi\ .$$

Primjer 1.39. Ako funkcija $f(z)$ ima pol u $z=a$ reda p i nultočku u $z=b$ reda n dokažite da vrijedi **teorem o argumentu**

$$\oint_{\mathcal{C}}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i(n-p)\ ,$$

gdje krivulja $\mathcal{C}$ obuhvaća a i b.

R. U neposrednoj okolini točke a vrijedi

$$f(z)=\frac{k}{(z-a)^p}\ , \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{p}{z-a}\ ,$$

dok u okolini točke b

$$f(z)=r(z-b)^n\ , \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-b}\ .$$

Dakle, funkcija $f'(z)/f(z)$ ima polove prvog reda u $z=a$ i $z=b$ s reziduumima p i n, respektivno. Kako su to jedine singularne točke dane funkcije, slijedi da krivulju $\mathcal{C}$ sa

slike xx možemo rastaviti na krivulje $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ koje će obuhvaćati samo $z = a$, odnosno $z = b$. Tada

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = -\oint_{\mathcal{C}_1} \frac{p}{z-a}\, dz + \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{n}{z-b}\, dz = 2\pi i(n-p)\ ,$$

čime je dokazana tražena trvdnja.

Kod složenih funkcija kompleksne varijable, za koje broj i red polova nije transparentan, teorem o argumentu omogućava dobivanje tih informacija analizom funkcije $f'(z)/f(z)$ po odabranim zatvorenim krivuljama.

Primjer 1.40. Izračunajte

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^2 + z^{-2}}{(b - z^*)(z^* - a)}\, dz \qquad \mathcal{C} \equiv \{z; |z| = r\} \quad (0 < |a| < r < |b|)\ .$$

R. Funkcija ima polove 1. reda u $z = r^2/a$ i $z = r^2/b$, s tim da je unutar integracijske krivulje samo r^2/b. Reziduum je dan s

$$\mathrm{Res}\,(r^2/b) = \lim_{z \to r^2/b} \frac{z^4 + 1}{b(r^2 - az)(z - r^2/b)} = \frac{1}{b^4}\frac{r^8 + b^4}{r^2(b-a)}\ .$$

Rješenje je

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^2 + z^{-2}}{(b - z^*)(z^* - a)}\, dz = 2\pi i \frac{1}{b^4}\frac{r^8 + b^4}{r^2(b-a)}\ .$$

Integrali racionalnih funkcija oblika $R(\sin\theta, \cos\theta)$

Promatramo integrale tipa

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\ d\theta$$

gdje je $R(x, y)$ racionalna funkcija, odnosno može se napisati u obliku

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

gdje su $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ polinomi. Nadalje, pretpostavljamo da je $Q(x, y)$ različita od nule na jediničnoj kružnici

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

Ideja se sastoji u zamjeni integracijske varijable,

$$z = e^{i\theta}\ , \quad d\theta = -i\,\frac{dz}{z} \tag{1.70}$$

pri čemu integracija po realnoj osi u granicama od 0 do 2π prelazi u integraciju u kompleksnoj ravnini duž jedinične kružnice. Trigonometrijske funkcije pri ovoj zamjeni postaju

$$\sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i} \ , \quad \cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2} \ . \tag{1.71}$$

Primjer 1.41. Izračunajte

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos\theta + 2\sin\theta} \ .$$

R. Uz supstituciju (1.70) imamo

$$\begin{aligned} I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos\theta + 2\sin\theta} &= -i \oint_C \frac{dz}{z} \frac{1}{3 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \\ &= -2i \oint_C \frac{dz}{(1-2i)z^2 + 6z + 1 + 2i} \ . \end{aligned}$$

Podintegralna funkcija ima polove 1. reda u

$$z_1 = -1 - 2i \, , \quad z_2 = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \ ,$$

od kojih se samo z_2 nalazi unutar integracijske krivulje. Reziduum lako izračunamo

$$\mathrm{Res}\,(z_2) = \lim_{z \to z_2} \frac{z - z_2}{(1-2i)(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{4} \ .$$

Stoga

$$I = (-2i)\ 2\pi i\ \frac{1}{4} = \pi \ .$$

Primjer 1.42. Pokažite da za realne parametre $|a| > b > 0$ vrijedi

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b\cos x}\, dx \ = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b\sin x}\, dx \ = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ .$$

R. Uvedimo $c = b/a$. Tada

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b\cos x} = -i\frac{2}{ac} \oint_C \frac{dz}{z^2 + \frac{2}{c}z + 1} \ .$$

Podintegralna funkcija ima polove 1. reda u

$$z_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - c^2}}{c} \ ,$$

gdje je jedino $|z_+| < 1$. Njen reziduum u toj točci iznosi

$$\mathrm{Res}\,(z_+) = \frac{c}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} \ ,$$

pa je rješenje

$$I = -\frac{2i}{ac}\ 2\pi i\ \mathrm{Res}\,(z_+) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ .$$

Za integral sa sinusom postupamo analogno.

Primjer 1.43. Izračunajte

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{(13-5\cos x)^2}\,dx\ .$$

R. Uz supstituciju (1.70) imamo

$$I=\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{(13-5\cos x)^2}\,dx=\frac{2}{i}\oint_C \frac{(z+1)^2}{(5z^2-26z+5)^2}\,dz\ .$$

Podintegralna funkcija ima polove 2. reda u $z=5,\,1/5$. Reziduum u točci $z=1/5$ je

$$\mathrm{Res}\,(1/5)=\lim_{z\to 1/5}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1/5)^2(z+1)^2}{25(z-5)^2(z-1/5)^2}\right]=\frac{1}{192}\ ,$$

čime možemo izračunati traženi integral

$$I=2\pi i\frac{2}{i}\frac{1}{192}=\frac{\pi}{48}\ .$$

Primjer 1.44. Za $a>1$, pokažite

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(3x)}{a+\cos x}\,dx\ =\ \pi\left[4a^2-1-\frac{a(4a^2-3)}{\sqrt{a^2-1}}\right]\ .$$

R. Uz supstituciju (1.70) imamo

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3x)}{a+\cos x}\,dx=-\frac{i}{2}\oint_C \frac{z^6+1}{z^3(z^2+2az+1)}\,dz\ .$$

Podintegralna funkcija ima polove 1. reda u $z_\pm=-a\pm\sqrt{a^2-1}$, te pol trećeg reda u $z=0$. Jedino polovi $z=0$, te $z=z_+$ se nalaze unutar integracijske krivulje. Pripadni reziduumi

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,(0)&=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z^6+1}{z^3+2az+1}\right)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z^3+2az+1}\right)\\&=-\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z^2+2az+1)^2}\left[1-\frac{4(z+a)^2}{z^2+2az+1}\right]=4a^2-1\ ,\end{aligned}$$

$$\mathrm{Res}\,(z_+)=\lim_{z\to z_+}\frac{z^3+z^{-3}}{2z+2a}=\frac{(\sqrt{a^2-1}-a)^3-(\sqrt{a^2-1}+a)^3}{2\sqrt{a^2-1}}=-\frac{a(4a^2-3)}{\sqrt{a^2-1}}\ .$$

Konačno

$$I=-\frac{i}{2}2\pi i\left[\mathrm{Res}\,(0)+\mathrm{Res}\,(z_+)\right]=\pi\left[4a^2-1-\frac{a(4a^2-3)}{\sqrt{a^2-1}}\right]\ .$$

Primjer 1.45. Dokažite

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\phi}{1-2a\cos\phi+a^2}\,d\phi\ =\begin{cases}\pi/a^2\,, & |a|>1\\ \pi\,, & |a|<1\end{cases}$$

R. Uz supstituciju (1.70) imamo

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\phi}{1-2a\cos\phi+a^2}\, d\phi = -\frac{1}{4i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{(z^2-1)^2}{z^2[az^2-z(1+a^2)+a]}\ .$$

Podintegralna funkcija ima pol drugog reda u $z=0$. Također iz jednadžbe $az^2-z(1+a^2)+a=0$ imamo polove prvog reda u $z=a, 1/a$. U području $|a|<1$ ($|a|>1$) pol $-a$ ($-1/a$) se nalazi unutar integracijske krivulje. Pripadni reziduumi

$$\mathrm{Res}\,(0) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z^2-1)^2}{az^2-z(1+a^2)+a}\right] = 1-\frac{1}{a^2}\ ,$$

$$\mathrm{Res}\,(a) = \lim_{z\to a}\frac{(z^2-1)^2}{az^2\left(z-\frac{1}{a}\right)} = 1-\frac{1}{a^2}\ ,$$

$$\mathrm{Res}\,(-1/a) = \lim_{z\to 1/a}\frac{(z^2-1)^2}{az^2(z-a)} = 1+\frac{1}{a^2}\ .$$

Tada je za $|a|<1$

$$I = 2\pi i\left(-\frac{1}{4i}\right)[\mathrm{Res}\,(0)+\mathrm{Res}\,(a)] = \pi\ ,$$

te za $|a|>1$

$$I = 2\pi i\left(-\frac{1}{4i}\right)[\mathrm{Res}\,(0)+\mathrm{Res}\,(1/a)] = \frac{\pi}{a^2}\ .$$

Primjer 1.46. (Wallisovi integrali) Pokažite da vrijedi

$$I = \int_0^{\pi}\sin^{2n}x\ dx\ =\ \int_0^{\pi}\cos^{2n}x\ dx\ =\ \pi\,\frac{(2n)!}{((2n)!!)^2}\ ,$$

za $n\in\mathbb{N}$.

R. Zbog parnosti funkcije

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2n}x\ dx\ = |z=e^{i\theta}| = \frac{-i}{2(2i)^{2n}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}}\,dz\ .$$

gdje je integracijska krivulja $\mathcal{C}$ jedinična kružnica. Podintegralna fukcija ima pol $(2n+1)$-og reda u $z=0$.

$$\mathrm{Res}\,(0) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(2n)!}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\left[(z^2-1)^{2n}\right]\ .$$

Ovdje ćemo upotrijebiti binomni teorem,

$$(z^2-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k\, z^{4n-2k}\ ,$$

kao i formulu

$$\frac{d^m}{dz^m}\,z^k = k\cdot(k-1)\cdot\cdots\cdot(k-(m-1))z^{k-m} = \frac{k!}{(k-m)!}\,z^{k-m}\ .$$

Slijedi da je za $r\le n$,

$$\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\,z^{4n-2k} = \frac{(4n-2k)!}{(2n-2k)!}\,z^{2n-2k}\ ,$$

dok u ostalim slučajevima ($r > n$) deriviranjem dobijemo nulu. Odavde slijedi da u limesu kada $z \to 0$, od svih članova u izrazu za reziduum preostane samo onaj uz z^0, tj. za $r = n$. Slijedi

$$\mathrm{Res}\,(0) = \frac{1}{(2n)!}\binom{2n}{n}\frac{(2n)!}{0!}(-1)^n = (-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}\ ,$$

$$I = \frac{-i}{2(2i)^{2n}}\cdot 2\pi i\cdot(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\pi(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{\pi(2n)!}{((2n)!!)^2}\ ,$$

$$I = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi\ .$$

Za integral s kosinusom postupamo analogno.

Integrali duž realne osi

Promatrati ćemo integrale po realnoj osi funkcije $R(x)$, gdje su moguće slijedeće situacije

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\ ,\quad R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\cos x\quad R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\sin x\ ,$$

gdje su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi.

Uobičajena krivulja integracije u ovoj klasi integrala, uz realnu os, uključuje i integral po polukružnici Γ polumjera R, kojom zatvaramo integracijsku krivulju kao na Slici xx. Na kraju računa puštamo $R \to \infty$. Tipično se integracijska krivulja Γ odabire tako da integral po njoj iščezava. Da bi to vrijedilo dovoljno je odozgo ograničiti vrijednost integrala i pokazati da to iščezava. U tu svrhu poslužujemo se lemom 1.26.

Ponekad singularitete podintegralne funkcije susrećemo na krivulji integracije. U tom slučaju moguće je integral na pogodan način regularizirati. Ono što računamo je **glavna vrijednost** integrala definirana s

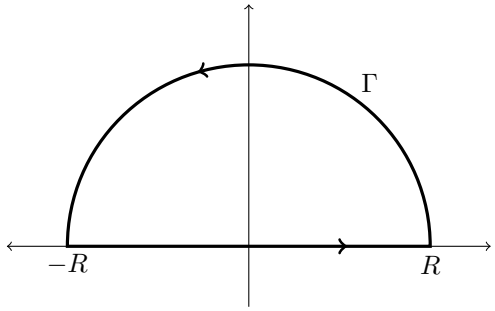
$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f(x)dx\ ,$$

gdje je x_0 točka u kojoj funkcija ima singularitet. Tipičan primjer ovakve situacije je integral $\int_{-1}^{1} dx/x$. Iako sam integral ne postoji, njegova glavna vrijednost je dobro definirana i iznosi 0. Glavna vrijednost ne mora uvijek postojati. Primjer takve situacije je jednostavno $\int_{-1}^{1} dx/x^2$.

Polukružna integracija bez singulariteta na realnoj osi

Primjer 1.47. Izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}\ .$$



Slika 1.12: Generička krivulja za narednu klasu problema. Polumjer R pušta se u beskonačnost.

R. Promatrati ćemo integral

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(1+z^2)^2} \ ,$$

gdje je zatvorena krivulja $\mathcal{C}$ definirana tako da se realna os zatvori u beskonačnosti s integralom po polukružnici na pozitivnoj imaginarnoj osi Γ, kao na slici 1.12. Podintegralna funkcija ima polove drugog reda u $z = \pm i$, od kojih se samo $z = i$ nalazi unutar integracijske krivulje. Reziduum je dan s

$$\mathrm{Res}\,(i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-i)^2}{(z-i)^2(z+i)^2}\right] = \frac{1}{4i} \ .$$

Stoga imamo

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\Gamma} f(z)dz = \frac{\pi}{2} \ .$$

Za integral po polukružnici Γ dovoljno je naći njegovu gornju među, odnosno pokazati da ona iščezava

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| \le l(\Gamma) \max_{\Gamma} |f(z)| \le (\pi R) \times \max_{\Gamma} \frac{1}{(|z|^2-1)^2} = \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \ .$$

U drugom koraku korištena je nejednakost trokuta, a u zadnjem puštamo polumjer integracijske krivulje Γ $|z| = R$ u beskonačnost. U limesu $R \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2} \ .$$

Primjer 1.48. Za $a > 0$ i $b > 0$, izračunajte

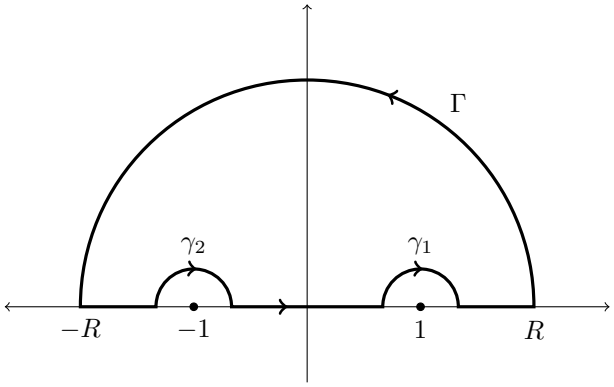
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\, dx \ .$$

R. Promatramo integral

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} \ .$$

Integracijska krivulja je dana na slici 1.12. Polovi $z = \pm ib$ su prvog reda, te se jedino $z = +ib$ nalazi unutar integracijske krivulje. Po teoremu o reziduumu

$$\mathrm{Res}\,(ib) = \lim_{z\to ib} \frac{(z-ib)e^{iaz}}{z^2+b^2} = \frac{e^{-ab}}{2ib} \ .$$



Slika 1.13: Integracijska krivulja s polukružnicom u slučaju kada se polovi nalaze na realnoj osi.

Za ocjenu integrala izračunajmo prvo apsolutnu vrijednost podintegralne funkcije

$$\left|\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\right| = \frac{e^{-aR\sin\theta}}{|z^2+b^2|} \leq \frac{e^{-aR\sin\theta}}{R^2-b^2} \ ,$$

gdje iz nejednakosti trokuta slijedi zadnji korak. Važno je napomenuti da smo u ovom slučaju morali zatvoriti realnu os baš s polukružnicom odozgo. Jedino u tom slučaju imamo osiguran eksponencijalni pad podintegralne funkcije. Tada

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-b^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \ .$$

Slijedi

$$\int_{-R}^{R} + \int_\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} = \frac{\pi}{b}e^{-ab} \ .$$

Ako uzmemo samo realni dio gornjeg izraza dobivamo da je traženi integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\ dx = \frac{\pi}{b}e^{-ab} \ .$$

Polukružna integracija uz singularitete na realnoj osi

Primjer 1.49. Izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^2-1}\ dx \ .$$

R.

Uočimo odmah da podintegralna funkcija ima polove na realnoj osi. U tom slučaju računati ćemo glavnu vrijednost integrala. Promatramo integral

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}z}}{z^2-1}\ dz \ .$$

Dio krivulje $\mathcal{C}$ čini realna os, a dio polukružnica u beskonačnosti na $\mathrm{Im}(z) > 0$. Polove u $z = \pm 1$ zaobilazimo po malim polukružnicama γ_1 i γ_2 (vidi sliku 1.13). Ova regularizacija odgovara glavnoj vrijednosti na realnoj osi ako polumjere ρ_1 i ρ_2, polukružnica γ_1 i γ_2, puštamo u 0. Imamo

$$\oint_{\mathcal{C}} = \int_{-R}^{-1-\rho_1} + \int_{\gamma_1} + \int_{-1+\rho_1}^{1-\rho_2} + \int_{\gamma_2} + \int_{1+\rho_2}^{R} + \int_{\Gamma} = 0 \ ,$$

gdje, u odgovarajućem limesu, suma integrala

$$\int_{-R}^{-1-\rho_1} + \int_{-1+\rho_1}^{1-\rho_2} + \int_{1+\rho_2}^{R} \ ,$$

čine traženu glavnu vrijednost. Integral po polukružnici Γ se lako pokaže da iščezava

$$\left| \int_{\Gamma} \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0 \ .$$

Integrale po polukružnicama $\gamma_{1,2}$ pronaći ćemo tako da razvijemo funkciju oko središta tih kružnica, ± 1, respektivno

$$f(z) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}z}}{z^2 - 1} = \frac{\mathrm{Res}\,(-1)}{z+1} + g(z) \ ,$$

$$f(z) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}z}}{z^2 - 1} = \frac{\mathrm{Res}\,(1)}{z-1} + h(z) \ ,$$

gdje su $g(z)$ i $h(z)$ analitičke funkcije. S obzirom da se radi o infinitezimalnoj okolini oko singulariteta, prvi član u razvoju biti će dominantan. Dakle

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \mathrm{Res}\,(-1) \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z+1} + \int_{\gamma_1} g(z)dz = -i\pi \mathrm{Res}\,(-1) + \int_{\gamma_1} g(z)dz \ .$$

Kako je $g(z)$ analitička u okolini -1, $|g(z)| \leq M$, gdje je M konstanta, pa je

$$\left| \int_{\gamma_1} g(z)dz \right| \leq (\rho_1 \pi) \times M \xrightarrow[\rho_1 \to 0]{} 0 \ .$$

Slično se pokaže

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = -i\pi \mathrm{Res}\,(1) \ .$$

Slijedi U granici $R \to \infty$, te $\rho_{1,2} \to 0$ slijedi

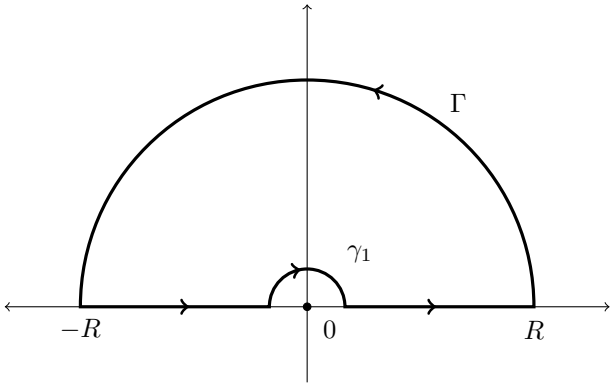
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - i\pi \left[\mathrm{Res}\,(1) + \mathrm{Res}\,(-1) \right] = 0 \ .$$

Reziduumi se lagano izračunaju $\mathrm{Res}\,(\pm 1) = \frac{i}{2}$, pa je, ograničavanjem na realan dio posljednjeg izraza, konačan rezultat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^2 - 1} \, dx = -\pi \ .$$

Primjer 1.50. Izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx \ .$$



Slika 1.14: blabla..

R. Pomoću identiteta

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x \ ,$$

promatramo

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\frac{3}{4}e^{iz} - \frac{1}{4}e^{3iz}}{z^3} dz \ ,$$

gdje je podintegralna funkcija definirana na slici 1.14. Traženi integral je imaginarni dio integrala po realnoj osi.

Primjetimo da, iako je prvotna podintegralna funkcija imala uklonjivi singularitet u $x = 0$, uz danu supstituciju, u kompleksnoj ravnini imamo pol 3. reda. Slijedi

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_{-R}^{-\rho} + \int_{\gamma} + \int_{\rho}^{R} + \int_{\Gamma} = 0 \ .$$

Integral po Γ iščezava

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^3} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \ ,$$

dok integral za integral po γ prvo razvijamo $f(z)$ oko $z = 0$

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z^3} + \frac{3}{4}\frac{1}{z} + g(z) \ ,$$

gdje je $g(z)$ analitička. Tada

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \frac{1}{2}\int_{\gamma} \frac{dz}{z^3} + \frac{3}{4}\int_{\gamma} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma} g(z)dz \ .$$

Prvi i posljednji integral u gornjem izrazu iščezavaju, pa je

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \frac{3}{4}\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = -\frac{3\pi i}{4} \ .$$

U limesu $R \to \infty$, te $\rho \to 0$ slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{3\pi}{4} \ .$$

Primjer 1.51. Za $a > b > 0$, te $c > 0$, izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{x(x^2+c^2)}dx \ .$$

R. Uz identitet

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] \ ,$$

imamo

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{x(x^2+c^2)}dx = \frac{1}{4}\left[J(\alpha)+J(\beta)\right] \ ,$$

gdje je $\alpha = a+b$, a $\beta = a-b$, te

$$J(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x(x^2+c^2)}dx \ .$$

Promatramo integral tipa

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{i\alpha z}}{z(z^2+c^2)}dz \ ,$$

duž integracijske krivulje $\mathcal{C}$ sa slike 1.14. Trivijalno je pokazati da integral po Γ iščezava. Tada, u limesu $R\to\infty$,

$$\oint_{\mathcal{C}} = \int_{-\infty}^\infty + \int_\gamma = \int_{-\infty}^\infty -i\pi\mathrm{Res}\,(0) = 2\pi i\mathrm{Res}\,(ic) \ .$$

Reziduumi su dani s

$$\mathrm{Res}\,(ic) = -\frac{e^{-\alpha c}}{2c^2} \ , \quad \mathrm{Res}\,(0) = \frac{1}{c^2} \ .$$

Ako sad uzmemo imaginarni dio integrala, slijedi

$$J(\alpha) = \frac{\pi}{c^2}\left(1-e^{-\alpha c}\right) \ .$$

Konačno

$$I = \frac{\pi}{2c^2}\left[1-e^{-ac}\mathrm{ch}\,(bc)\right] \ .$$

Primjer 1.52. Dokažite da vrijedi **Jordanova nejednakost**

$$\int_0^\pi e^{-a\sin\theta}d\theta \le \frac{\pi}{a}\left(1-e^{-a}\right) \ ,$$

gdje je $a > 0$.

R. Kako je $\sin\theta$ rastuća, konkavna funkcija na intervalu $0 < \theta \le \pi/2$, slijedi

$$\sin\theta \ge \frac{2\theta}{\pi} \ .$$

Odnosno $e^{-a\sin\theta} \le e^{-2a\theta/\pi}$. S obzirom na to da je

$$\int_{\pi/2}^\pi e^{-a\sin\theta}d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-a\sin\theta}d\theta \ ,$$

slijedi

$$\int_0^\pi e^{-a\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-a\sin\theta}d\theta \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-2a\theta/\pi}d\theta = \frac{\pi}{a}\left(1-e^{-a}\right) \ .$$

Primjer 1.53. Izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx \ .$$

R. Promotrimo integral

$$\oint_{\mathcal{C}} = \frac{e^{iz}}{z}\, dz \ ,$$

gdje je krivulja $\mathcal{C}$ definirana na slici 1.14. Slijedi

$$\oint_{\mathcal{C}} = \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x}\, dx \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_\rho^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0 \ ,$$

gdje je posljednji korak dobiven pomoću teorema o reziduumu. Integral po Γ se ocjenjuju pomoću Jordanove nejednakosti

$$\left| \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq R \int_0^\pi \left| \frac{1}{i} e^{iR\cos\theta - R\sin\theta} \right| d\theta = \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta \leq \frac{\pi}{R}(1 - e^{-R}) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \ .$$

Integral po γ se izračuna puštanjem $\rho \to 0$

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_\gamma \left[\frac{1}{z} + g(z) \right] dz = -i\pi \ ,$$

jer je $g(z)$ analitička funkcija. U limesu $R \to \infty$, te $\rho \to 0$ nalazimo

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi \ .$$

Imaginarni dio gornjeg izraza daje

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ .$$

Primjer 1.54. Izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} e^{\cos x} \sin(\sin x)\ dx \ .$$

R. Promatrati ćemo integral

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\exp(e^{iz})}{z}\, dz \ ,$$

po krivulji $\mathcal{C}$ definiranoj na slici 1.14. Na realnoj osi, imaginarni dio tog izraza nam daje traženi integral. Rastav integrala po dijelovima daje

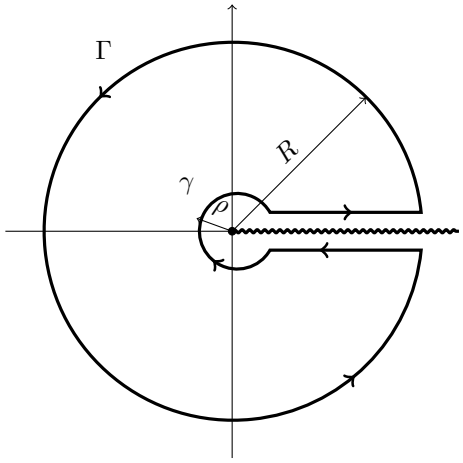
$$\oint = \int_{-\infty}^\infty + \int_\gamma + \int_\Gamma = 0 \ ,$$

gdje desna strana slijedi iz teorema o reziduumu. Podintegralna funkcija ima u $z = 0$ pol prvog reda. Njegov reziduum je

$$\mathrm{Res}\,(0) = \lim_{z\to 0} \exp(e^{iz}) = e \ ,$$

pa je

$$\int_\gamma = -i\pi \mathrm{Res}\,(0) = -i\pi e \ .$$



Slika 1.15: Prikazana je generička krivulja integracije za narednu klasu problema. Polumjer R (ρ) se pušta u beskonačnost (nulu).

Specifičnost ovog primjera je u tome da integral po Γ ne iščezava. Uz parametrizaciju $z = Re^{i\theta}$

$$\int_\Gamma \frac{\exp(e^{iz})}{z}\,dz = i\int_0^\pi \frac{\exp\left[\exp\left(iRe^{i\theta}\right)\right]}{Re^{i\theta}} Re^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^\pi \exp\left[\exp\left(iR\cos\theta - R\sin\theta\right)\right]\,d\theta\,.$$

U limesu $R \to \infty$ dobije se konačna vrijednost

$$\int_\Gamma \xrightarrow[R\to\infty]{} i\int_0^\pi d\theta = i\pi\,.$$

Sada imamo

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\exp\left(e^{ix}\right)\,dx - i\pi e + i\pi\,.$$

Imaginarni dio gornjeg izraza daje konačan rezultat

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}e^{\cos x}\sin\left(\sin x\right)\,dx = \frac{\pi}{2}(e-1)\,.$$

Integracija s dvije kružnice

Narednom tehnikom se koristimo prilikom integriranja višeznačnih funkcija po realnoj osi. No to nije nužno - zanimati će nas i slučajevi gdje početna podintegralna funkcija nije višeznačna, već će nam se uvođenje višeznačne funkcije pokazati zgodnim pri računanju.

Primjer 1.55. Izračunajte

$$\int_0^\infty = \frac{x^{-1/3}}{x^2+1}\,dx\,.$$

R. Promotrimo

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^{-1/3}}{z^2+1}\,dz\ ,$$

gdje je krivulja $\mathcal{C}$ definirana na slici 1.15. Ne-analitičke točke ove funkcije su $z=\pm i$ (polovi), te $z=0$ (točka grananja). Primjetimo da je krivulja $\mathcal{C}$ pažljivo odabrana tako da zaobilazi rez koji se nalazi na pozitivnoj realnoj osi. Po teoremu o reziduumu

$$\oint = \int_\gamma + \int_\Gamma + \int_\rho^R \frac{x^{-1/3}}{x^2+1}\,dx + \int_R^\rho \frac{x^{-1/3}e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{x^2+1}\,dx = 2\pi i\left[\mathrm{Res}\,(i)+\mathrm{Res}\,(-i)\right]\ .$$

Primjetimo da posljednji integral ima dodatnu fazu zbog toga jer je argument kompleksnog broja duž pripadne krivulje infinitezimalno blizu 2π. Reziduumi dane funkcije su

$$\mathrm{Res}\,(i) = -\frac{i}{2}e^{-\frac{i\pi}{6}}\ , \qquad \mathrm{Res}\,(-i) = \frac{i}{2}e^{-\frac{i\pi}{2}}\ .$$

Integrali po γ i Γ iščezavaju

$$\mathrm{z}\in\gamma\,, \qquad \left|\frac{z^{-1/3}}{z^2+1}\right| \le \frac{|z|^{-1/3}}{1-|z|^2}\,, \qquad \left|\int_\gamma\right| \le 2\pi\rho\,\frac{\rho^{-1/3}}{1-\rho^2} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0\ .$$

$$\mathrm{z}\in\Gamma\,, \qquad \left|\frac{z^{-1/3}}{z^2+1}\right| \le \frac{|z|^{-1/3}}{|z|^2-1}\,, \qquad \left|\int_\Gamma\right| \le 2\pi R\,\frac{R^{-1/3}}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\ .$$

Ako sa I označimo traženi integral, onda u granici $\rho\to 0$, te $R\to\infty$ imamo

$$\left(1-e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) I = 2\pi i\,\frac{i}{2}\left(e^{-\frac{i\pi}{2}}-e^{-\frac{i\pi}{6}}\right)\ ,$$

odnosno

$$I = \pi\,\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\ .$$

Primjer 1.56. Izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}\ .$$

R. Promatramo

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z\ln z}{(1+z^2)^2}\,dz\ ,$$

gdje je integralna krivulja $\mathcal{C}$ definirana na slici 1.15. Polovi drugog reda se nalaze u $z=\pm i$. Imamo

$$\oint_{\mathcal{C}} = \int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx + \int_\infty^0 \frac{x(\ln x+2\pi i)}{(1+x^2)^2}\,dx\ .$$

gdje smo odmah uzeli u obzir da integrali po γ i Γ iščezavaju. Primjetimo fazu koja se pojavila pri integraciji tik ispod pozitivne realne osi. Po teoremu o reziduumu

$$-2\pi i\int_0^\infty \frac{x(\ln x+2\pi i)}{(1+x^2)^2}\,dx = 2\pi i\left[\mathrm{Res}\,(i)+\mathrm{Res}\,(-i)\right]\ .$$

Reziduum pola drugog reda z_0, dane podintegralne funkcije je

$$\mathrm{Res}\,(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z\ln z}{(z-z_0)^2}\right] = \lim_{z\to z_0}\left[\frac{\ln z+1}{(z-z_0)^2} - 2\frac{z\ln z}{(z-z_0)^3}\right]\ .$$

Uvrštavanjem $z_0 = \pm i$ slijedi $\operatorname{Res}(\pm i) = -1/4$, pa je

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Primjer 1.57. Izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{1+2x\cos\theta+x^2}\,dx\,, \quad 0<p<1\,, \quad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\,.$$

R. Promatramo

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^p}{1+2z\cos\theta+z^2}\,dz\,,$$

gdje je krivulja $\mathcal{C}$ definirana na slici 1.15. Točke $z_\pm = e^{i(\pi\mp\theta)}$ su polovi prvog reda, i nalaze se unutar integracijske krivulje. Integrali po γ i Γ iščezavaju, pa imamo

$$\oint_{\mathcal{C}} = (1-e^{2\pi i p})I = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(z_+)+\operatorname{Res}(z_-)\right]\,,$$

gdje smo s I označili traženi integral. Reziduumi

$$\operatorname{Res}(z_\pm) = \pm\frac{e^{ip(\pi\mp\theta)}}{2i\sin\theta}\,.$$

Slijedi

$$I = \frac{\pi}{\sin\theta}\,\frac{e^{ip(\pi-\theta)}-e^{ip(\pi+\theta)}}{1-e^{2\pi i p}} = \frac{\pi}{\sin\theta}\,\frac{\sin(p\theta)}{\sin(p\pi)}\,.$$

Primjer 1.58. Izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+x^2+x+1}\,.$$

R. Promatramo integral

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\ln z}{z^3+z^2+z+1}\,dz\,,$$

gdje je $\mathcal{C}$ krivulja sa slike 1.15. Primjetimo da nazivnik podintegralne funkcije $z^3+z^2+z+1 = (z^2+1)(z+1)$ ima polove prvog reda u $z=-1,\pm i$. S obzirom na to da integrali po γ i Γ iščezavaju, po teoremu o reziduumu slijedi

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\ln z}{z^3+z^2+z+1}\,dz = -2\pi i\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+x^2+x+1} = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(-1)+\operatorname{Res}(i)+\operatorname{Res}(-i)\right]\,.$$

Reziduumi podintegralne funkcije su

$$\operatorname{Res}(-1) = \lim_{z\to-1}\frac{\ln z}{z^2+1} = \frac{i\pi}{2}\,,$$

$$\operatorname{Res}(i) = \lim_{z\to i}\frac{\ln z}{(z+1)(z+i)} = \frac{\pi}{8}(1-i)\,,$$

$$\operatorname{Res}(-i) = \lim_{z\to-i}\frac{\ln z}{(z+1)(z-i)} = -\frac{3\pi}{8}(1+i)\,.$$

Slijedi

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+x^2+x+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Primjer 1.59. Izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx\ .$$

R. Promatramo

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\ln^3 z}{1+z^2}\,dz\ ,$$

gdje je $\mathcal{C}$ dana na slici 1.15. Označimo

$$I_k = \int_0^\infty \frac{\ln^k x}{1+x^2}\,dx\ .$$

Slijedi

$$\oint_{\mathcal{C}} = \int_0^\infty \frac{\ln^3 x}{1+x^2}\,dx - \int_0^\infty \frac{(\ln x + 2\pi i)^3}{1+x^2}\,dx = -6\pi i\, I_2 + 12\pi^2 I_1 + 8\pi^3 i I_0\ .$$

S druge strane, reziduumi polova prvog reda $\pm i$ su

$$\mathrm{Res}\,(i) = -\frac{\pi^3}{16}\,,\quad \mathrm{Res}\,(-i) = \frac{27\pi^3}{16}\ .$$

Pa imamo

$$\oint_{\mathcal{C}} = 2\pi i\,[\mathrm{Res}\,(i) + \mathrm{Res}\,(-i)] = \frac{13\pi^4}{4} i\ .$$

Pošto su $I_k \in \mathbb{R}$ slijedi da je $I_1 = 0$. Preostaje izračunati I_0

$$I_0 = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}\,2\pi i \mathrm{Res}\,(i) = \pi i\,\frac{1}{2i} = \frac{\pi}{2}\ ,$$

gdje smo integrirali po zatvorenoj polukružnici na $\mathrm{Im}(z) > 0$. Traženi integral je

$$I_2 = -\frac{1}{6\pi i}\left(\frac{13}{4} - 4\right)\pi^4 i = \frac{\pi^3}{8}\ .$$

Primjer 1.60. Za $|a| < 1$, izračunajte

$$\int_0^1 x^a (1-x)^{-a}\,dx\ .$$

R. Napravimo slijedeću supstituciju

$$t = \frac{x}{1-x}\ .$$

Tada je

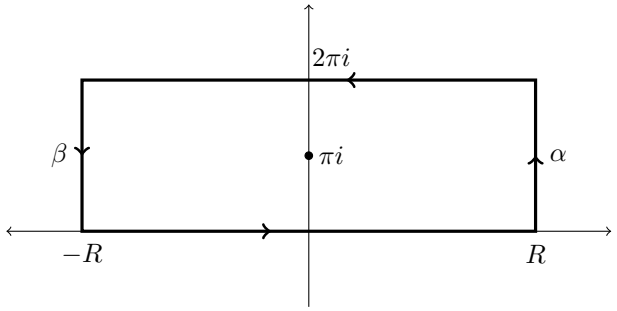
$$x = \frac{t}{1+t}\,,\qquad dx = \frac{dt}{(1+t)^2}\ .$$

Ako označimo traženi integral s I, imamo

$$I = \int_0^\infty \frac{t^a}{(1+t)^2}\,dt\ .$$

Ovaj integral sad možemo rješiti na uobičajen način. Promatrajmo

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^a}{(1+z)^2}\,dz\ .$$



Slika 1.16:

Podintegralna funkcija ima pol 2. reda unutar integracijske krivulje $\mathcal{C}$ dane na slici 1.15. Tada

$$\oint_{\mathcal{C}} = I(1 - e^{2\pi i a}) = 2\pi i \mathrm{Res}\,(-1)\ ,$$

gdje je uzeto u obzir da integrali po γ i po Γ iščezavaju. Možemo i izračunati reziduum

$$\mathrm{Res}\,(-1) = \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}(z^a) = a(-1)^{a-1} = -ae^{i\pi a}\ .$$

Traženi rezultat je

$$I = \frac{\pi a}{\sin(\pi a)}\ .$$

Pravokutna integracija

U ovom odjeljku susrećemo integrale hiperbolnih te eksponencijalne funkcije po realnoj osi. Pri integriranju, koristimo se periodičnošću tih funkcija na imaginarnoj osi: integracijska krivulja postaje pravokutnik gdje donju stranicu pravokutnika čini realna os, s pomakom od $2\pi i$. Bočne stranice se zatvaraju u beskonačnosti.

Primjer 1.61. Izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx\ ,$$

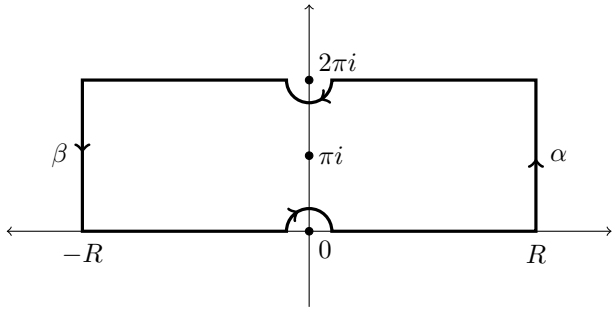
gdje je $0 < a < 1$.

R. Promatrajmo

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{az}}{1+e^z}\,dz\ ,$$

gdje je $\mathcal{C}$ krivulja definirana na slici 1.16. Podintegralna funkcija

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}\ ,$$



Slika 1.17:

ima polove prvog reda u $z = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, gdje se unutar integracijske krivulje nalazi samo πi. Slijedi

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{R}^{-R} f(x+2\pi i)\,dx + \int_{\alpha} f(z)\,dz + \int_{\beta} f(z)\,dz = 2\pi i \mathrm{Res}\,(\pi i)\ .$$

Pokažimo da integral po α iščezava

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{az}}{1+e^z}\right| \leq \frac{|e^{az}|}{|e^z|-1} = \frac{|e^{aR}e^{iay}|}{|e^R e^{iy}|-1} = \frac{e^{aR}}{e^R-1}\ .$$

Tada

$$\left|\int_{\alpha} f(z)dz\right| \leq 2\pi\,\frac{e^{aR}}{e^R-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\ ,$$

zbog toga jer je $a < 1$. Potpuno analogno se može pokazati da integral po β također iščezava. Reziduum u πi

$$\mathrm{Res}\,(\pi i) = \lim_{z\to\pi i} \frac{(z-\pi i)e^{az}}{1+e^z} = \lim_{z\to\pi i} \frac{e^{az}+a(z-\pi i)e^{az}}{e^z} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}\ .$$

U limesu $R\to\infty$ imamo

$$(1-e^{2\pi i a})\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = -2\pi i e^{a\pi i}\ ,$$

pa je konačni rezultat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}\ .$$

Primjer 1.62. Izračunajte

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sh}\,(ax)}{\mathrm{sh}\,(\pi x)}\,dx\ ,$$

gdje je $a > 0$.

R. Označimo traženi integral s I. Iz parnosti podintegralne funkcije slijedi

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}\,(cx)}{\mathrm{sh}\,x}dx = \frac{1}{4\pi}\left[J(c) - J(-c)\right]\ .$$

gdje je

$$J(c) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cx}}{\operatorname{sh} x}\, dx \ ,$$

te $c = a/\pi$. Dovoljno je dakle pronaći $J(c)$. Promotrimo u tu svrhu naredni integral

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{cz}}{\operatorname{sh} z}\, dz \ ,$$

gdje je $\mathcal{C}$ krivulja definirana na slici 1.17. Podintegralna funkcija ima polove prvog reda u $z = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, od kojih se pol u πi nalazi unutar integracijske krivulje. Tada u limesu $R \to \infty$

$$\oint_{\mathcal{C}} = (1 - e^{2\pi i c})I + \int_{\alpha} + \int_{\beta} + \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = 2\pi i \operatorname{Res}(\pi i) \ .$$

Lako je pokazati da u tom limesu integrali po krivuljama α i β iščezavaju. S druge strane, integrali po polukružnicama γ_1, γ_2 daju

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = -\pi i \left[\operatorname{Res}(0) + \operatorname{Res}(2\pi i)\right] \ ,$$

u granici infinitezimalnog polumjera. Potrebni reziduumi su

$$\operatorname{Res}(0) = 1 \,, \qquad \operatorname{Res}(i\pi) = -e^{\pi i c} \,, \qquad \operatorname{Res}(2\pi i) = e^{2\pi i c} \ .$$

Sad imamo

$$J(c)\left(1 - e^{2\pi i c}\right) - \pi i \left(1 + e^{2\pi i c}\right) = -2\pi i e^{\pi i c} \ ,$$

pa je

$$J(c) = \pi i \, \frac{1 - 2e^{\pi i c} + e^{2\pi i c}}{1 - e^{2\pi i c}} = \pi i \, \frac{1 - e^{\pi i c}}{1 + e^{\pi i c}} = -\pi i \, \frac{e^{\frac{\pi i c}{2}} - e^{-\frac{\pi i c}{2}}}{e^{\frac{\pi i c}{2}} + e^{-\frac{\pi i c}{2}}} = \pi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi c}{2}\right) \ .$$

Slijedi

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right) \ .$$

Primjer 1.63. Izračunajte

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + \pi^2)\operatorname{ch} x}\, dx \ .$$

R. Zbog polinoma u brojniku i nazivniku, podintegralna funkcija više nije periodična. Ideja je stoga konstruirati takvu podintegralnu funkciju $g(z)$ čiji će zbroj $g(z) + (-1)g(z + 2\pi i)$ dati točno funkciju koju želimo integrirati kada je $z = x$. Promatrati ćemo stoga

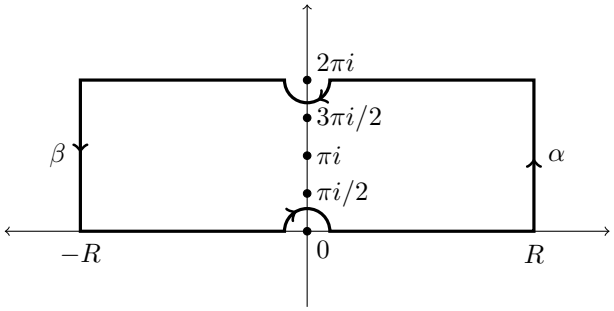
$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{P(z)}{(z - \pi i)\operatorname{ch} z}\, dz \ ,$$

gdje je krivulja $\mathcal{C}$ dana na slici 1.18, a polinom $P(z)$ je definiran tako da zadovoljava

$$\frac{z^2}{z^2 + \pi^2} = \frac{P(z)}{z - \pi i} - \frac{P(z + 2\pi i)}{z + \pi i} \ .$$

Za polinom $P(z)$ moramo odabrati da je minimalno drugog reda: $P(z) = az^2 + bz + c$. Iz jednadžbe

$$z^2 = (z + \pi i)P(z) - (z - \pi i)P(z + 2\pi i) \ ,$$



Slika 1.18:

možemo skupiti koeficijente uz pripadne potencije

$$z^2 = (2\pi i a)z^2 + c\pi i - 4\pi^3 a i - 2\pi^2 b + \pi i c \ .$$

Slijedi $a = i/2\pi$, odnosno

$$ci + \pi - \pi b = 0 \ .$$

Ako odaberemo $c = 0$ imamo $b = 1$, pa je

$$P(z) = \frac{i}{2\pi} z^2 + z \ .$$

Rastav krivuljnog integrala u limesu $R \to \infty$ daje

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{P(z)}{(z - \pi i)\mathrm{ch}\, z}\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{(x - \pi i)\mathrm{ch}\, x}\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x + 2\pi i)}{(x + \pi i)\mathrm{ch}\, x}\, dx \ ,$$

gdje smo odmah uzeli u obzir da integrali po krivuljama α i β iščezavaju u $R \to \infty$. Desna strana po konstrukciji daje traženi integral, dok ćemo lijevu stranu izvrijedniti pomoću teorema o reziduumu. Podintegralna funkcija ima polove prvog reda u πi te u $(2k + 1)\pi i/2$, $k \in \mathbb{Z}$ od kojih se jedino polovi za $k = 0, 1$ nalaze unutar integracijske krivulje. Stoga

$$2\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + \pi^2)\mathrm{ch}\, x}\, dx = 2\pi i \left[\mathrm{Res}\,(\pi i) + \mathrm{Res}\, \left(\frac{\pi i}{2} \right) + \mathrm{Res}\, \left(\frac{3\pi i}{2} \right) \right] \ .$$

Reziduumi su dani s

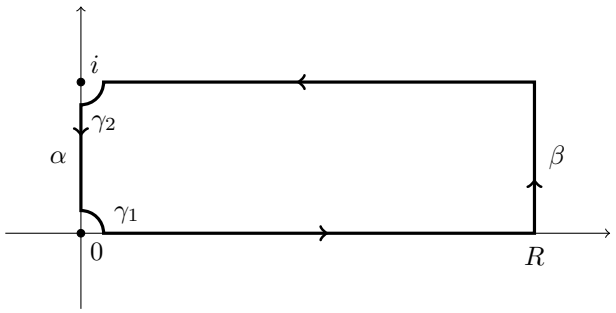
$$\mathrm{Res}\,(\pi i) = \lim_{z \to \pi i} \frac{P(z)}{\mathrm{ch}\, z} = -\frac{\pi i}{2} \ ,$$

$$\mathrm{Res}\, \left(\frac{\pi i}{2} \right) = \lim_{z \to \frac{\pi i}{2}} \frac{P(z)}{(z - \pi i)\mathrm{sh}\, z} = \frac{3i}{4} \ ,$$

$$\mathrm{Res}\, \left(\frac{3\pi i}{2} \right) = \lim_{z \to \frac{3\pi i}{2}} \frac{P(z)}{(z - \pi i)\mathrm{sh}\, z} = \frac{3i}{4} \ ,$$

gdje smo za posljednja dva reziduuma koristili L'Hospitalovo pravilo. Slijedi

$$I = \pi i \left(-\frac{\pi i}{2} + \frac{3i}{4} + \frac{3i}{4} \right) = \frac{\pi^2}{2} - \frac{3\pi}{2} \ .$$



Slika 1.19:

Primjer 1.64. Izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^{2\pi x}-1}\,dx\ .$$

R. Označimo traženi integral s I. Promatramo kompleksan integral

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z}-1}\,dz\ ,$$

po krivulji $\mathcal{C}$ sa slike 1.19. Polove prvog reda u $z=0,i$ zaobilazimo kružnim lukovima radijusa ρ_1 i ρ_2. Integral je stoga rastavljen na sljedeće dijelove:

$$\oint_{\mathcal{C}} = \ (1-e^{-a})\int_\rho^R \frac{e^{iax}}{e^{2\pi x}-1}\,dx\ + \int_\alpha\ + \int_\beta + \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = 0$$

Nadalje,

$$\operatorname{Res}(0) = \lim_{z\to 0}\frac{e^{iaz}}{2\pi e^{2\pi z}} = \frac{1}{2\pi}\,, \qquad \operatorname{Res}(i) = \lim_{z\to i}\frac{e^{iaz}}{2\pi e^{2\pi z}} = \frac{e^{-a}}{2\pi}\ ,$$

pa je

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = -\frac{2\pi i}{4}\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{e^{-a}}{2\pi}\right) = -\frac{i}{4}\left(1+e^{-a}\right)\ .$$

Integral po α iščezava: uz $z=R+iy$, imamo

$$\left|\frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z}-1}\right| \le \frac{|e^{iaz}|}{|e^{2\pi z}|-1} \le \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi R}-1}\ .$$

Stoga

$$\left|\int_\alpha\right| \le 1\cdot\frac{e^{-ay}}{e^{2\pi R}-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\ .$$

S druge strane, integral po β je konačan $z=iy$, $\quad e^{iaz}=e^{-ay}$

$$\int_\beta = \int_1^0 \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy}-1}\,d(iy)\ .$$

Imaginarni dio gornjeg integrala je lako izračunati

$$\operatorname{Im}\left(\int_\beta\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-ay}\,dy = \frac{1}{2a}\left(1-e^{-a}\right)\ .$$

Rješenje traženog integrala nalazimo u imaginarnom dijelu početne jednadžbe, što daje

$$(1-e^{-a})I - \frac{1}{4}(1+e^{-a}) + \frac{1}{2a}(1-e^{-a}) = 0 \ .$$

Slijedi

$$I = -\frac{1}{2a} + \frac{1}{4}\operatorname{cth}\left(\frac{a}{2}\right) \ .$$

Posebni slučajevi

U ovom odjeljku razmatramo realne integrale koji se također mogu izračunati pomoću kompleksnih integrala, jedino je moguće da u ovom slučaju krivulje netipične. Između ostalog, susresti ćemo se i s tzv. gama funkcijom

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \ ,$$

koja predstavlja generalizaciju faktorijela na realne brojeve. Drugim rječima, ona zadovoljava slijedeću jednadžbu

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \ .$$

Njena svojstva detaljno se ispituju u poglavlju xx.

Primjer 1.65. Izračunajte

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{2^z}{z^2}\,dz \ ,$$

gdje je $a>0$ i gdje je krivulja integracije pravac $\mathrm{Re}(z)=a$.

R. Promatramo integral

$$\oint_{\mathcal{C}}\frac{2^z}{z^2}\,dz \ ,$$

duž krivulje dane na slici xx. Kako podintegralna funkcija ima pol drugog reda unutar integracijske krivulje, slijedi

$$\oint_{\mathcal{C}} = \int_\alpha + \int_\Gamma + \int_\beta + \int_{a-iR}^{a+iR} = 2\pi i \mathrm{Res}\,(0) \ .$$

Sad ćemo pokazati da svi integrali osim traženog iščezavaju. Npr. integral po α je parametriziran s $z=x+iR$, pa je

$$\left|\int_\alpha\right| \le \frac{a}{2\pi}\frac{2^x}{|x+iR|^2} \le \frac{a}{2\pi}\frac{2^x}{(R-x)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \ ,$$

te analogno za krivulju β. Po krivulji Γ pišemo $z=Re^{i\theta}$

$$\left|\int_\Gamma\right| \le \frac{\pi R}{2\pi}\frac{2^{R\cos\theta}}{R^2} \le \frac{1}{2}\frac{2^{R\cos\theta}}{R}.$$

Kako je $\pi/2<\theta<3\pi/2$, $\cos\theta$ je uvijek negativan pa u granici $R\to\infty$ i taj integral iščezava. Preostaje još izračunati reziduum

$$\mathrm{Res}\,(0) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}(2^z) = \frac{\ln 2}{2\pi i} \ ,$$

pa je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{2^z}{z^2}\,dz = \ln 2\ .$$

Primjer 1.66. Dokažite da

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{a+x^n}\,dx = \frac{\pi}{n}a^{(m+1-n)/n}\csc\left[\frac{\pi(m+1)}{n}\right]\ ,$$

za $a>0$, te $n>m+2>0$.

R. Promatramo kompleksan integral

$$\oint_{\mathcal{C}}\frac{z^m}{a+z^n}\,dz\ ,$$

gdje je krivulja $\mathcal{C}$ prikazana na slici xx. S obzirom na to da je središnji kut $2\pi/n$, jedini singularitet koji se nalazi unutar integracijske krivulje je dan s $z_0=a^{1/n}e^{\pi i/n}$, i to je pol prvog reda. Ako traženi integral označimo s I, imamo

$$\oint_{\mathcal{C}}\frac{z^m}{a+z^n}\,dz = \left[1-e^{2(m+1)\pi i/n}\right]I+\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\mathrm{Res}\,(z_0)\ ,$$

gdje je podintegralna funkcija ograničena odozgo

$$|f(z)| = \left|\frac{iR^{m+1}e^{i(m+1)\theta}}{a+R^ne^{in\theta}}\right| \le \frac{R^{m+1}}{R^n+a}\ .$$

pa je

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le R\frac{\pi}{n}\,\frac{R^{m+1}}{R^n+a}\xrightarrow[R\to\infty]{} 0\ .$$

Vrijednost reziduuma je

$$\mathrm{Res}\,(z_0) = \frac{z_0^m}{nz_0^{n-1}} = \frac{a^{(m+1-n)/n}}{ne^{(n-m-1)\pi i/n}}\ .$$

Tada u granici $R\to\infty$

$$I = \frac{2\pi i}{n}\frac{a^{(m+1-n)/n}}{e^{(n-m-1)\pi i/n}-e^{(n+m+1)\pi i/n}} = \frac{\pi}{n}\frac{a^{(m+1-n)/n}}{\sin\left[(m+1)\pi/n\right]}\ .$$

Primjer 1.67. Izračunajte

$$\int_0^\infty \sin(x^p)\,dx\ ,$$

za $p>1$.

R. Označimo traženi integral s I. Supstitucija $x^p = t$ vodi na

$$I = \frac{1}{p}\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-1}\sin t\,dt\ .$$

Promotrimo

$$\oint_{\mathcal{C}} z^{\frac{1}{p}-1}e^{iz}\,dz\ ,$$

po krivulji danoj na slici xx. Slijedi

$$\oint_{\mathcal{C}} = \frac{1}{p}\int_\rho^R x^{\frac{1}{p}-1}e^{ix}\,dx + \frac{1}{p}\int_R^\rho (xe^{i\theta})^{\frac{1}{p}-1}\exp\left(ixe^{i\theta}\right)e^{i\theta}\,dx + \int_\Gamma + \int_\gamma = 0\ ,$$

gdje posljednja jednakost slijedi iz teorema o reziduumu. U granici $\rho \to 0$, te $R \to \infty$, drugi integral postaje proporcionalan gama funkciji ako odaberemo $\theta = \pi/2$

$$\begin{aligned}\int_\infty^0 (xe^{i\theta})^{\frac{1}{p}-1}\exp\left(ixe^{i\theta}\right)e^{i\theta}\,dx &= -\int_0^\infty x^{\frac{1}{p}-1}e^{i\theta/p}\exp\left(ixe^{i\theta}\right)\,dx \\ &= -e^{\frac{\pi}{2p}i}\int_0^\infty x^{\frac{1}{p}-1}e^{-x}\,dx = -e^{\frac{\pi}{2p}i}\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\ .\end{aligned}$$

Pokažimo da integral po kružnom luku Γ iščezava. Ako luk Γ parametriziramo s $z = Re^{i\phi}$, problem možemo analizirati jednako kao što smo dokazali Jordanovu nejednakost

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| &\le \int_\Gamma |f(z)|\,dz = R^{1/p}\int_0^\theta e^{-R\sin\theta}\,d\phi \le R^{1/p}\int_0^{\pi/2} e^{-2R\phi/\pi}\,d\phi \\ &= \frac{\pi}{2}R^{\frac{1}{p}-1}\left(1-e^{-R}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\ .\end{aligned}$$

Parametrizacija luka γ s $z = \rho e^{i\phi}$ analognim postupkom vodi na

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le -\frac{\pi}{2}\rho^{\frac{1}{p}-1}\left(1-e^{-\rho}\right) \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0\ .$$

Dakle, u limesu $\rho \to 0$, $R \to \infty$ imamo

$$\int_0^\infty x^{\frac{1}{p}-1}e^{ix}\,dx = e^{\frac{\pi}{2p}i}\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\ .$$

Uzimanjem imaginarnog dijela lijeve i desne strane gornjeg izraza slijedi

$$I = \sin\left(\frac{\pi}{2p}\right)\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)\ .$$

1.9 ♣ ZADACI

1. Izračunajte

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{2iz}-5z}{z+2i}\,dz\ ,\ ,\quad \mathcal{C} = \{z;\left|z-\frac{i}{2}\right| = 1\}\ .$$

2. Pokažite da vrijedi

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{ch}\ z\ \mathrm{ctg}\ z\ dz\ =\ 2\pi i\,\frac{\mathrm{sh}\,(n+1/2)\pi}{\mathrm{sh}\,(\pi/4)}\ ,$$

gdje je $\mathcal{C} = \{z; |z| = (n+1/2)\pi\}$ te $n \in \mathbb{N}_0$.

3. Pokažite da je

$$J = \oint_{\mathcal{C}} P(z) \left\{ e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + \cdots + e^{\frac{1}{z-k}} \right\} \, dz \;=\; 2\pi i \sum_{j=0}^{p} \sum_{m=0}^{k} \frac{P^{(m)}(j)}{m!(m+1)!} \,,$$

gdje je P polinom stupnja k i $\mathcal{C} = \{z; |z| = r\}$, $r \neq 1, 2, \ldots k$ i $p = \lfloor r \rfloor$.

4. Izračunajte

$$\oint \frac{\sin\left(\frac{a}{z}\right)}{z^2 + b^2} \, dz \,, \qquad \mathcal{C} = \{z; |z| = r\} \,,$$

te gdje je $r > 0$ i $|b| \neq r^2$.

5. Izračunajte

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{(1+z)^6}{1+z^6} \, dz \,,$$

gdje je $\mathcal{C} = \left\{ z : |z - i| + |z + i| = \sqrt{5} \right\}$.

6. Dokažite ispravnost slijedećih jednakosti za realne parametre $a > b > 0$,

   a)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b\cos x)^2} \, dx \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b\sin x)^2} \, dx \;=\; \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \,,$$

   b)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b\cos^2 x} \, dx \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b\sin^2 x} \, dx \;=\; \frac{2\pi}{\sqrt{a(a-b)}} \,,$$

   c)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b\cos^2 x)^2} \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b\sin^2 x)^2} \;=\; \frac{(2a+b)\pi}{(a(a+b))^{3/2}} \,.$$

7. Pretpostavljajući $0 < a < b < 1$, pokažite da je

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{(1 - 2a\cos x + a^2)(1 - 2b\cos x + b^2)} \, dx \;=\; \frac{\pi}{2(1-ab)} \,.$$

8. Uz $a, b, c > 0$ te $c^2 > a^2 + b^2$

   a)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c} \;=\; \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} \,,$$

   b)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a\cos x + b\sin x + c)^2} \;=\; \frac{2\pi c}{(c^2 - a^2 - b^2)^{3/2}} \,,$$

   c)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x + c^2} \;=\; \frac{\pi}{2[(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)]^{1/2}} \,.$$

9. Izračunajte

a)
$$\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2+\cos x}\, dx \;= 4\pi\left(2-\sqrt{3}\right)\;,$$

b)
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{1-2a\cos 2x+a^2}\, dx \;= \frac{1-a+a^2}{1-a}\,\pi\;, \quad |a|<1\;,$$

c)
$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{1+\cos^2 x}\, dx \;= \int_0^{2\pi} \frac{1+\sin x}{1+\sin^2 x}\, dx \;= \pi\sqrt{2}\;,$$

d)
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{a-b\cos x}\, dx \;= \frac{2\pi}{b^2}\,\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right) \qquad , \qquad a>b>0\;.$$

10. Pokažite da je za $n\in\mathbb{N}_0$,

a)
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\phi}\cos(n\phi-\sin\phi)\, dx \;=\; \frac{2\pi}{n!}\;,$$

b)
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\phi}\cos(\sin x)\cos(nx)\, dx \;=\; \frac{\pi}{n!}\;.$$

11. Ako je $a>0$ ili $a<-1$,

a)
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\phi}{a+\sin^2\phi}\, d\phi \;=\; \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\phi}{a+\cos^2\phi}\, d\phi \;=\; \pi\left(1-\sqrt{\frac{a}{a+1}}\right)\;,$$

b)
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\phi}{a+\cos^2\phi}\, d\phi \;= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\phi}{a+\sin^2\phi}\, d\phi \;= 2\pi\left(\sqrt{\frac{a+1}{a}}-1\right)\;.$$

12. Pokažite da naredni integral isčezava ako je $0<a<1$,
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi}{a\sin\phi-1}\, d\phi\;.$$

13. Izračunajte
$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\;.$$

14. Za $a>0$ izračunajte
$$\text{a)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+a^4}\,, \qquad \text{b)}\ \int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}\;.$$

15. Za $a, b > 0$, izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

16. Izračunajte

$$\text{a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,, \qquad \text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\ .$$

17. Za $a \in \mathbb{R}$, te $b, c > 0$, izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(cx)}{(x-a)^2+b^2}\,dx\ .$$

18. Za $a, b > 0$, izračunajte

$$\text{a)} \int_{0}^{\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2}\,dx\,, \qquad \text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx\ .$$

Koliki je rezultat u slučaju $a = b$?

19. Izračunajte

$$\text{a)} \int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^4-1}\,, \qquad \text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-5x+6}\,dx\ .$$

20. Za $a > 0$ izračunajte

$$\text{a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}dx\,, \qquad \text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2(a^2+x^2)}\,dx\ .$$

21. Pokažite da vrijedi

a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x-a)(x-b)}\,dx = \pi\,\frac{\cos a - \cos b}{a-b}\ .$$

b)
$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos^2(ax)-\cos^2(bx)}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,(|b|-|a|)$$

c)
$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\frac{\sin(ax)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\,(a)\left(2e^{-|ab|}-1\right)\ .$$

22. Za $a, b > 0$, izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{b^4-x^4}\,dx\ .$$

23. Za $a > 0$, te $b, c \in \mathbb{R}$, izračunajte

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin(ax)}{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}\,dx\ .$$

24. Izračunajte
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2-2x+2)\sqrt{x}} \ .$$

25. Izračunajte
$$\text{a)} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^5}\,, \qquad \text{b)} \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^4}\,dx \ .$$

26. Za $0<p<1$, izračunajte
$$\text{a)} \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx\,, \qquad \text{b)} \int_0^\infty \frac{x^{-p}}{1+x^2}\,dx\,, \qquad \text{c)} \int_0^\infty \frac{x^p}{(1+x^2)^2}\,dx \ .$$

27. Za $a\in\mathbb{R}$, izračunajte
$$\text{a)} \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx\,, \qquad \text{b)} \int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}\,dx \ .$$

28. Izračunajte
$$\text{a)} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{(1+x)^2}\,dx\,, \qquad \text{b)} \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^4}\,dx \ .$$

29. Izračunajte
$$\int_0^\infty \frac{\ln t^{1/2}}{1+t^{3/2}}\,dt \ .$$

30. Izračunajte

a)
$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}\,dx\,, \qquad 0<p<1 \ .$$

b)
$$\int_0^1 \frac{x^{-p}(1-x)^p}{1+x^2}\,dx\,, \qquad |p|<1 \ .$$

c)
$$\int_0^1 \frac{x^p(1-x)^{-p}}{(1+x)^2}\,dx\,, \qquad |p|<1 \ .$$

31. Pokažite da je za $a>0$, te $n\geq 3$
$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^n}\,dx = \frac{\ln a - H_{n-2}}{(n-1)a^{n-1}} \ ,$$
gdje je H_n harmonijski broj.

32. Pokažite da za $0<a<1$ vrijedi
$$\int_0^\infty \frac{e^{ax}}{e^x-1}\,dx = \pi\mathrm{ctg}\,(\pi a) \ .$$

33. Za $b > a > 0$ pokažite da vrijedi

$$\text{a)} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(bx)}\,dx = \frac{\pi}{2b}\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2b}\,, \qquad \text{b)} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{ch}(bx)}\,dx = \frac{\pi}{2b}\csc\frac{a\pi}{2b}\,.$$

$$\text{c)} \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\operatorname{sh}(bx)}\,dx = \frac{\pi}{2b}\operatorname{th}\frac{a\pi}{2b}\,, \qquad \text{d)} \int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{\operatorname{ch}(bx)}\,dx = \frac{\pi}{2b}\frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{a\pi}{2b}\right)}\,.$$

34. Izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh} x}\cos(bx)\,dx\,, \qquad |a| < 1\,, b > 0\,.$$

35. Izračunajte

$$\text{a)} \int_0^\infty \frac{x^2}{\operatorname{ch} x}\,dx\,, \qquad \text{b)} \int_0^\infty \frac{x^3}{\operatorname{sh} x}\,dx\,, \qquad \text{c)} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 e^x}{1+e^{2x}}\,dx\,.$$

36. Izračunajte

$$\text{a)} \int_0^\infty \frac{x^2}{1+\operatorname{ch} x}\,dx\,, \qquad \text{b)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x}\right)\frac{dx}{x}\,.$$

37. Za $a > 0$ izračunajte

$$\text{a)} \int_0^\infty \frac{x}{\operatorname{sh}(ax)}\,dx\,, \qquad \text{b)} \int_0^\infty \frac{x\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{ch} x}\,dx\,, \qquad \text{c)} \int_0^\infty \frac{x\cos(ax)}{\operatorname{sh} x}\,dx\,.$$

38. Za $a > 0$ pokažite da vrijedi

$$\int_0^\infty \frac{e^{ax}}{(e^x+1)(e^x+2)}\,dx = \frac{\pi(1-2^{a-1})}{\sin(a\pi)}\,.$$

39. Za $\alpha > 0$, te $|\beta| < \pi/2$ dokažite

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2\cos\beta}\cos\left(\alpha x^2\sin\beta\right)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\,.$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2\cos\beta}\sin\left(\alpha x^2\sin\beta\right)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\,.$$

40. Izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}\,dx\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

41. Za $n \in \mathbb{N}$ dokažite da vrijedi

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{2\pi}{4^n}\frac{\Gamma(2n-1)}{[\Gamma(n)]^2}\,.$$

42. Izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x^p)}{x^p}\,,$$

za $p > 1$.

Poglavlje 2

Obične diferencijalne jednadžbe

§ 2.1 Općenite karakteristike

Diferencijalnom jednadžbom zovemo one jednadžbe koje sadrže derivacije ili diferencijale nepoznate funkcije. Ako nepoznata funkcija ovisi samo o jednom argumentu, diferencijalna jednadžba zove se **obična**. Jednadžbe u kojima nepoznata funkcija ovisi o nekoliko argumenata, te zbog toga uključuje parcijalne derivacije, zove se **parcijalna** diferencijalna jednadžba. **Red** diferencijalne jednadžbe jednak je redu najviše derivacije koju sadrži dotična jednadžba. U ovom poglavlju obrađujemo obične diferencijane jednadžbe prvog i višeg reda, dok su parcijalne diferencijalne jednadžbe predmet xx poglavlja.

Obične diferencijalne jednadžbe su, dakle, jednadžbe oblika

$$F[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)] = 0$$

gdje je $y(x)$ tražena funkcija koja ovisi o jednoj varijabli, x, a $F[\ldots]$ je, zasada, nekakva općenita funkcija (preciznije - funkcional).

Svaka funkcija koja na konačnom intervalu $a \leq x \leq b$ ili beskonačnom intervalu zadovoljava diferencijalnu jednadžbu zove se **rješenje** ili **integral** diferencijalne jednadžbe. Ponekada se koristi i izraz *integrirati jednadžbu* u značenju - rješiti (diferencijalnu) jednadžbu. **Opće** rješenje diferencijalne jednadžbe je ono koje sadrži onoliko nezavisnih neodređenih koeficijenata koliki je red diferencijalne jednadžbe. **Partikularno** rješenje diferencijalne jednadžbe dobiva se konkretnim odabirom brojčanih vrijednosti neodređenih koeficijenata u općem rješenju.

Singularna točka diferencijalne jednadžbe jest ona u kojoj isčezavaju koeficijenti uz najveću derivaciju. Obično se diferencijalna jednadžba zapisuje u **standardnom** obliku, onom u kojem je koeficijent uz najveću derivaciju jednak 1.

Neka su $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ C^{n-1} funkcije. Determinanta Wronskog ili **Wronskijan** je definiran kao slijedeći funkcional

$$W(x; f_1, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} . \tag{2.1}$$

Vrijede naredna dva teorema (bez dokaza).

Teorem 2.1. *Ako $W(x; f_1, \ldots, f_n) \neq 0$, $\forall x \in I$, tada su $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ linearno nezavisne funkcije na intervalu I.*

Obrat ovog teorema općenito ne vrijedi, iako se može postići pooštravanjem zahtjeva na funkcije $f_i(x)$. U singularnim točkama diferencijalne jednadžbe, s druge strane, možemo imati $W = 0$, ali i $W \to \infty$ (vidi primjer 2.22).

Teorem 2.2. *Neka su $\{y_1, \ldots, y_n\}$ rješenja linearne diferencijalne jednadžbe*

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)\, y(x) = 0 \ , \quad x \in I \subset \mathbb{R} \ .$$

gdje su $a_i(x)$ neprekidne funkcije na $I \subset \mathbb{R}$ (kako ne bi imali singularnih točaka). Tada $\forall x \in I$ vrijedi $W'(x) = -a_{n-1} W(x)$, odnosno

$$W(x; y_1, \ldots, y_n) = W(x_0; y_1, \ldots, y_n) \exp\left(- \int_{x_0}^{x} a_{n-1}(s)\, ds \right) . \tag{2.2}$$

Jednadžba (2.2) poznata je pod nazivom **Abelov identitet** ili **Liouvilleova formula**. Vidljivo je da W iščezava ili svugdje ili nigdje na intervalu I. Ukoliko je $W = 0$ na intervalu I, tada je $\{y_1, \ldots, y_n\}$ skup linearno zavisnih funkcija.

Primjer 2.1. Pokažite da za funkcije

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 + x^3 \,, & x < 0 \\ 1 \,, & x \geq 0 \end{cases} \ , \quad f_2(x) = \begin{cases} 1 \,, & x < 0 \\ 1 + x^3 \,, & x \geq 0 \end{cases} \ , \quad f_3(x) = 3 + x^3 \ ,$$

Wronskijan iščezava.

R. Ako uzmemo $x < 0$, po jednadžbi (2.1) imamo

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 + x^3 & 1 & 3 + x^3 \\ 3x^2 & 0 & 3x^2 \\ 6x & 0 & 6x \end{vmatrix} = 18x^3 - 18x^3 = 0 \ ,$$

po Sarrusovom pravilu. Analogno za $x \geq 0$

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 + x^3 & 3 + x^3 \\ 0 & 3x^2 & 3x^2 \\ 0 & 6x & 6x \end{vmatrix} = 18x^3 - 18x^3 = 0 \ .$$

Prethodni primjer ukazuje na to da Wronskijan može iščezavati, iako su dane funkcije linearno nezavisne. Poanta je u tome da ne postoji diferencijalna jednadžba kojoj bi te funkcije bile rješenja.

2.1 ♣ ZADACI

1. Izračunajte Wronskijan za slijedeće funkcije te diskutirajte dobiveni rezultat u kontekstu linearne nezavisnosti funkcija.

   a) $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = x^3$,

   b) $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = 3 + 2x^2$,

   c) $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = \begin{cases} -y_1(x)\,, & x < 0 \\ y_1(x)\,, & x \geq 0 \end{cases}$.

§ 2.2 Diferencijalne jednadžbe prvog reda

Slijedeći teorem garantira egzistenciju rješenja.

Teorem 2.3. (Peano) *Neka je $S \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ otvoren podskup, i neka je $f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada diferencijalna jednadžba*

$$y'(x) = f(x, y(x)) \ ,$$

uz početni uvjet $y(x_0) = y_0$, gdje su $x_0, y_0 \in S$, ima rješenje $y(x)$ t.d.

$$y(x) : I \to \mathbb{R} \ ,$$

gdje je I okolina x_0.

S druge strane, primjetimo da gornji teorem ne garantira jedinstveno rješenje - $y(x)$ označava samo jedno moguće rješenje. Jedinstvenost postižemo jačim restrikcijama na $f(x, y)$.

Teorem 2.4. (Picard - Lindelöf) *Ako su $f(x, y)$ i $\partial_y f(x, y)$ neprekidne u unutrašnjosti pravokutnika*

$$R = (x, y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d \ ,$$

i $(x_0, y_0) \in R$, tada postoji jedinstveno rješenje

$$y'(x) = f(x, y(x))\,, \qquad y(x_0) = x_0 \ ,$$

na intervalu $I \subset [a, b]$, gdje je $x_0 \in I$.

Primjer 2.2. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y' = y^{4/5}\,, \qquad y(0) = 0\ .$$

R. Kako je $f(x,y) = y^{4/5}$ neprekidna funkcija, ali njena derivacija nije, Picard - Lindelöfov teorem nije zadovoljen, pa diferencijalna jednadžba ima više rješenja. Moguća rješenja su $y = 0$, $y = (x/5)^5$. Štoviše, moguća su i slijedeća rješenja

$$y(x) = \begin{cases} 0\,, & x \le 0 \\ \left(\frac{x}{5}\right)^5\,, & x > 0 \end{cases}\ , \quad y(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{5}\right)^5\,, & x \le 0 \\ 0\,, & x > 0 \end{cases}\ .$$

U nastavku izlažemo klasične metode rješavanja diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

Separacija varijabli

Ukoliko se jednadžba može napisati u obliku

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0\ ,$$

tada nakon djeljenja jednadžbe s $P(x)N(y)$ možemo obaviti direktnu integraciju,

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = C\ ,$$

gdje je C neka konstanta. Valja napomenuti slijedeće: ako $P(x)$ i $N(y)$ za bilo koje vrijednosti $x = x_0$ i/ili $y = y_0$ poprimaju vrijednost nula, onda će $P(x)$ i $N(y)$ za $(x,y) = (x_0, y_0)$ biti integrali zadane diferencijalne jednadžbe.

Primjer 2.3. Riješite slijedeće jednadžbe

a) $y' - 5y = 0$,

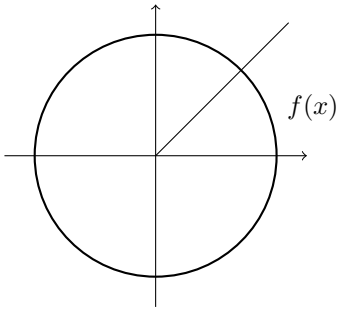
b) $xy' - y = 0$.

R. a) Napišemo prvo $dy/y = 5dx$, čime je očito da je jednadžba separabilna, te se da integrirati. Rješenje $y = Ce^{5x}$ je definirano do na konstantu C. U slučaju b) također možemo separirati varijable $dy/y = dx/x$, čije je rješenje $y = Cx$.

Primjer 2.4. U rujnu 1991 pronađena je poznata mumija "Ötzi" iz neolitičkog razdoblja kamenog doba u ledu Ötzelskih alpi na austrijsko-talijanskoj granici. Kada je Ötzi otprilike živio ako je omjer ugljika C^{14} i ugljika C^{12} u mumiji 52.5% u odnosu na omjer u živom organizmu. Vrijeme poluživota ugljika C^{14} je 5175 godina.

R. Neka je y_0 početni omjer C^{14} naspram C^{12}. Zakon radioaktivnog raspada je

$$\frac{dy}{y} = -k dt\ ,$$



Slika 2.1: Normala povučena iz ishodišta na krivulju $f(x)$. Ako je ishodište fiksna točka, krivulja predstavlja kružnicu.

odnosno $y = y_0 e^{-kt}$. Nepoznatu konstantu k možemo povezati s vremenom poluživota τ

$$y_0 e^{-k\tau} = 0.5 y_0 \,, \qquad k = \frac{\ln 2}{\tau} = 0.0001213 \,,$$

gdje smo koristili $\tau = 5175$ godina. Vrijeme t u kojem je Ötzi živio je

$$e^{-kt} = 0.525 \,, \qquad t = 5312 \,\text{godina} \,.$$

Primjer 2.5. Pronađite krivulju kojoj sve normale prolaze kroz fiksnu točku.

R. Neka fiksna točka predstavlja ishodište koordinatnog sustava u ravnini, te neka je tražena krivulja opisana funkcijom $f(x)$ kao na slici 2.1. Tada je koeficijent pravca k normale koja prolazi kroz ishodište dan s

$$k = \frac{f}{x} = -\frac{1}{f'} \,,$$

gdje smo u posljednjem izrazu iskoristili da su nagibi pravca normale i tangente okomiti. Dobijemo diferencijalnu jednadžbu u separabilnoj formi

$$f df = -x dx \,.$$

Njeno rješenje definira kružnicu

$$f^2 + x^2 = C \,,$$

gdje je C konstanta.

Primjer 2.6. Prema Newtonovom zakonu hlađenja, brzina hlađenja tijela (u zraku) proporcionalna je razlici temperature tijela T, i temperature okoline T_0. Ako je $T_0 = 20$ °C, te znamo da se u 20 min tijelo ohladi sa 100 °C na 60 °C, u kojem vremenu se ohladi na 30 °C?

R. Newtonov zakon hlađenja glasi

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0) \,,$$

gdje je k nepoznati faktor proporcionalnosti, a t vrijeme. Tada

$$\frac{dT}{T-T_0} = kdt \ ,$$

odnosno

$$T = T_0 + Ae^{kt} \ ,$$

gdje je A konstanta koju ćemo odrediti iz početnih uvjeta. Znamo da je $T(0) = 100$ što nam daje $A = 80$. Drugi uvjet $T(20) = 60$ definira $k = -\frac{\ln 2}{20}$. Konačno rješenje glasi

$$T(t) = T_0 + 80e^{-\frac{t}{20}\ln 2} \ .$$

Vrijeme za koje se tijelo ohladi sa 100 °C na 30 °C dobije se invertiranjem gornjeg izraza u slučaju $T(t) = 30$, što daje $t = 60$ min.

Primjer 2.7. Spremnik s vodom sadrži q litara vode u kojoj je na početku y_0 kg soli. Rasol (slana voda) ulazi u spremnik brzinom v kg/min, te svaka kila rasola sadrži p kg otopljene soli. Tekućina u spremniku drži se uniformnom miješanjem. Rasol izlazi iz spremnika s w kg/min. Pronađi koliko kg soli je u spremniku u trenutku t?

R. Označimo broj kg soli u spremniku u t s $y(t)$. Tada diferencijalna jednadžba problema glasi

$$\frac{dy}{dt} = vp - w\frac{y}{q} \ .$$

U gornjoj jednadžbi vp je broj kg po minuti soli koja ulazi u spremnik. Kako je y/q postotak soli u spremniku u trenutku t imamo da je $w(y/q)$ broj kg po minuti soli koja izlazi iz spremnika.

Dana jednadžba je separabilna, pa se može riješiti direktnom integracijom

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{vp - w\frac{s}{q}} = \int_0^t dt \ ,$$

$$y(t) = qp\frac{v}{w} + \left(y_0 - qp\frac{v}{w}\right)e^{-\frac{w}{q}t} \ .$$

Homogene jednadžbe

Također poznata pod nazivom diferencijalna jednadžba sličnosti. **Homogena funkcija** stupnja m je funkcija više varijabli f sa sljedećim svojstvom,

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) = \lambda^m f(x_1, x_2, \dots) \ , \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \ ,$$

Ako su $M(x,y)$ i $N(x,y)$ homogene funkcije istog stupnja m, tada diferencijalnu jednadžbu

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \ ,$$

rješavamo preko supstitucije $u(x) = y(x)/x$

$$y'(x) = xu'(x) + u(x) \ ,$$

$$\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = \frac{M(1,y/x)}{N(1,y/x)} = \frac{M(u)}{N(u)} \equiv F(u) \ ,$$

čime je svodimo na problem separacije varijabli

$$F(u) + (xu'(x) + u(x)) = 0 \ ,$$

$$F(u) + u = -x\frac{du}{dx} \ ,$$

$$-\frac{dx}{x} = \frac{du}{u + F(u)} \ .$$

Primjer 2.8. Riješite:

a) $xy' - x = x$,

b) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$, $y(1) = -2$.

R. a) U ovom slučaju jednadžba nije separabilna

$$y' = 1 + \frac{y}{x} \ ,$$

ali je homogena. Uz supstituciju $u = y/x$ slijedi $du = dx/x$, odnosno $u = \ln x + C$. Rješenje je stoga $y = x \ln x + Cx$. U slučaju b) također vrijedi da je jednadžba homogena:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{\lambda x \lambda y} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = f(x, y) \ .$$

Za funkciju $u = y/x$ dobivamo da zadovoljava

$$udu = \frac{dx}{x} \ ,$$

što se lako integrira: $u^2 = 2 \ln x + C$, odnosno $y^2 = x^2 \ln x^2 + Cx^2$. Uz rubni uvjet $y(1) = -2$ slijedi $C = 4$, pa

$$y = -|x| \sqrt{\ln x^2 + 1} \ .$$

Egzaktna diferencijalna jednadžba

Neka je zadana diferencijalna jednadžba oblika

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \ .$$

Ako postoji funkcija $\Phi(x, y)$ takva da vrijedi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = d\Phi(x, y) \ ,$$

odnosno, lijeva strana jednadžbe je **totalni diferencijal**, tada je opći integral

$$\Phi(x, y) = \text{konstanta} \ .$$

Eksplicitno možemo pisati

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y)d\xi \ + \int_{y_0}^{y} N(x, \eta)d\eta \ ,$$

Nužan i dovoljan uvjet za gore navedenu situaciju jest da su funkcije $M(x,y)$ i $N(x,y)$, kao i njihove prve derivacije neprekidne na jednostavno povezanom području te da vrijedi

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \ .$$

Zadnju jednadžbu zovemo **uvjet egzaktnosti**.

Primjer 2.9. Dokažite da je separabilna diferencijalna jednadžba nužno egzaktna.

R. Separabilna diferencijalna jednadžba je oblika

$$F(x)G(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \ .$$

Ako cijelu jednadžbu podijelimo s $G(y)$ i $P(x)$, imamo

$$\frac{F(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{G(y)}dy = 0 \ ,$$

iz čega očito

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F}{P}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{G}\right) = 0 \ .$$

Primjer 2.10. Pokažite da se uvjet egzaktnosti diferencijalne jednadžbe može fizikalno razumijeti kao definicija konzervativne sile.

R. Promotrimo silu $\mathbf{F} = (M, N)$ po infinitezimalnom putu $\mathbf{dx} = (dx, dy)$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{dx} = Mdx + Ndy \ .$$

Ako je sila konzervativna, tada se može napisati kao gradijent potencijala $\mathbf{F} = \nabla\Phi$. Slijedi

$$Mdx + Ndy = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy = d\Phi \ .$$

Uvjet egzaktnosti sad slijedi iz jednostavnog svojstva

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} \ .$$

Dakle, egzaktnost diferencijalne jednadžbe možemo poistovjetiti s fizikalnim sustavima u kojima postoji potencijal.

Primjer 2.11. Riješite: $2xydx + (1+x^2)dy = 0$.

R. Uz $M = 2xy$, $N = 1 + x^2$ imamo

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \ , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \ ,$$

pa je jednadžba egzaktna, iako nije homogena. "Potencijal" Φ možemo pronaći iz

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = M \ , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = N \ .$$

Iz druge jednadžbe slijedi

$$\Phi(x,y) = (1+x^2)y + h(x) \ ,$$

Prva jednadžba određuje nepoznatu funkciju $h(x)$: $h'(x) = 0$, pa se uvjet konstatnosti Φ svodi na

$$y = \frac{C}{1+x^2} \ .$$

Napomena: ova jednadžba je separabilna, pa se mogla i drugačije rješiti.

Eulerov multiplikator

Ako imamo slučaj diferencijalne jednadžbe

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \ ,$$

koja nije egzaktna, možemo pomnožiti cijelu jednadžbu s neodređenom funkcijom $\mu(x,y)$ tako da nova jednadžba

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \ ,$$

bude egzaktna. Tada

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \ ,$$

$$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \ . \tag{2.3}$$

Primjer 2.12. Pronađite Eulerov multiplikator u slučaju kada je $M = yf(xy)$, $N = xg(xy)$.

R. Krenimo redom

$$\frac{\partial M}{\partial y} = f(xy) + y\frac{\partial xy}{y}\frac{\partial f(xy)}{\partial(xy)} = f(xy) + xy\frac{\partial f(xy)}{\partial xy} \ .$$

Uz supstituciju $s = xy$ imamo

$$\frac{\partial M}{\partial y} = f(s) + sf'(s) \ ,$$

te analogno

$$\frac{\partial M}{\partial x} = g(s) + sg'(s) \ .$$

Sad to ubacujemo u jednadžbu za Eulerov multiplikator

$$xg(s)\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial \ln\mu}{\partial s} - yf(s)\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial \ln\mu}{\partial s} = f(s) + sf'(s) - g(s) - sg'(s) \ .$$

Uz pokratu $h(s) = f(s) - g(s)$, slijedi

$$-sh(s)\frac{\partial \ln\mu}{\partial s} = h(s) + sh'(s) \ ,$$

odnosno

$$\frac{\partial \ln(\mu h)}{\partial s} = -\frac{1}{s} \ .$$

Integriranjem gornje jednažbe dobivamo

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xy}\frac{1}{h(xy)} = \frac{1}{xM(x,y) - yN(x,y)} \ .$$

Primjer 2.13. Riješite: $y' = 2xy - x$

R. U ovom slučaju $M = -2xy + x$, $N = 1$, pa jednažba nije egzaktna. Koristimo se metodom Eulerovog multiplikatora:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - \frac{M}{N}\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -2x \ .$$

Kako je desna strana jednadžbe funkcija samo od x, pojednostavljujemo problem odabirom $\partial\mu/\partial y = 0$. Slijedi

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = -2x \Rightarrow \mu(x) = e^{-x^2} \ .$$

Uz dani Eulerov multiplikator funkcije $\mu(x)M(x,y)$ i $\mu(x)N(x,y)$ po konstrukciji definiraju egzaktni problem. To znači da možemo naći potencijal

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mu(x)N(x,y) = e^{-x^2} \Rightarrow \Phi(x,y) = ye^{-x^2} + h(x) \ .$$

Iz druge jednadžbe

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \mu(x)M(x,y) \ ,$$

imamo

$$h'(x) = xe^{-x^2} \Rightarrow h(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C \ .$$

Konstatnost potencijala konačno vodi na

$$y = Ce^{x^2} + \frac{1}{2} \ .$$

Linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda

Općenita forma

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x) \ . \tag{2.4}$$

Za ovu klasu diferencijalnih jednadžbi, npr. metoda Eulerovog multiplikatora pruža općenito rješenje:

$$y(x) = \exp\left(-\int^x P(s)\ ds\right)\left\{\int^x Q(s)\ \exp\left(\int^s P(t)\ dt\right) ds + C\right\} \ . \tag{2.5}$$

Primjer 2.14. Pronađite rješenje (2.4).

R. Iz narednog oblika diferencijalne jednadžbe

$$dy + (P(x)y(x) - Q(x))dx = 0 \ ,$$

vidimo da su $M = Py - Q$, $N = 1$. Dakle

$$\frac{\partial(\ln \mu)}{\partial x} - (P(x)y(x) - Q(x))\frac{\partial(\ln \mu)}{\partial y} = P(x) \ ,$$

pa je pogodno odabrati $\partial\mu/\partial y = 0$. Tada

$$\frac{\partial(\ln \mu)}{\partial x} = P(x) \ \Rightarrow \ \mu(x) = \exp\left(\int^x P(s)\ ds\right) \ ,$$

čime smo odredili Eulerov multiplikator. Potencijal Φ je dan s

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} = \mu(x) \Rightarrow \Phi(x,y) = \mu(x)y + F(x) \ .$$

Nepoznata funkcija $F(x)$ određuje se iz

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = \mu(x)(P(x)y(x) - Q(x)) \ ,$$

odnosno

$$\frac{\partial \mu(x)}{\partial x}\, y + F'(x) = yP(x)\mu(x) + F'(x) \ ,$$

pa je

$$F(x) = -\int^x \mu(s)\, Q(s)\ ds \ .$$

Uvjet konstatnosti potencijala se može zapisati kao

$$y = \frac{1}{\mu}\left(\int^x \mu(s)\, Q(s)\ ds\right) \ ,$$

što je traženo rješenje.

Primjer 2.15. Pokažite da se **Bernoullijeva diferencijalna jednadžba**

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad n \in \mathbb{N} \ ,$$

svodi na linearnu diferencijalnu jednadžbu.

R. U slučaju kada je $n = 0$ ili $n = 1$ Bernoullijeva diferencijalna jednadžba se svodi na linearnu diferencijalnu jednadžbu, koja je već obrađena, pa te slučajeve isključujemo iz daljnjeg razmatranja. Metoda rješavanja je podjeliti jednadžbu s y^n i uvesti novu funkciju $z(x) = y^{-n+1}(x)$, pri čemu se početna jednadžba svodi na linearnu.

$$z'(x) = (-n+1)y^{-n}(x)y'(x) \ ,$$

$$\frac{y'(x)}{y^n(x)} + p(x)y^{1-n}(x) = q(x) \Rightarrow \frac{1}{-n+1}\, z'(x) + p(x)z(x) = q(x) \ ,$$

$$z'(x) + (1-n)p(x)z(x) = (1-n)q(x) \ ,$$

čime uistinu dobivamo linearnu diferencijalnu jednadžbu.

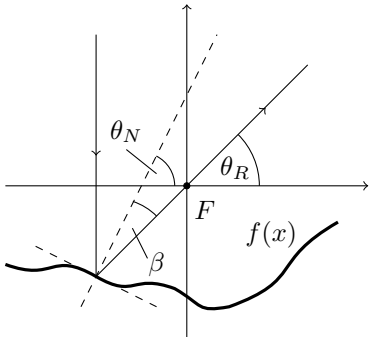
Primjer 2.16. Pronađite oblik zrcala koji fokusira paralelni snop zraka u fiksnu točku.

R. Stavimo fokus u ishodište kao na slici 2.2. Tada je oblik zrcala definiran s funkcijom $f(x)$. Definirajmo nagib reflektiranog pravca s $k_R = \operatorname{tg}\theta_R$. Tada imamo

$$\theta_N + \beta = \frac{\pi}{2}\ , \ , \quad \theta_R + \beta = \theta_N \ ,$$

gdje je θ_N kut koji normala zatvara s x-osi, te β kut pod kojim svjetlost upada na zrcalo. Po zakonu loma svjetlosti, pod jednakim kutem β se svjetlost i reflektira od zrcala. Gornje dvije jednadžbe daju $\theta_R = -\frac{\pi}{2} + 2\theta_N$, odnosno

$$k_R = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\theta_N\right) = -\frac{\cos(2\theta_N)}{\sin(2\theta_N)} = \frac{\operatorname{tg}^2\theta_N - 1}{2\operatorname{tg}\theta_N} \ ,$$



Slika 2.2: Na slici je prikazana krivulja $f(x)$ čiji oblik tražimo. Koordinatni sustav je tako odabran da se fokus F nalazi u ishodištu.

što možemo izraziti preko nagiba normale $k_N = \operatorname{tg}\theta_N$. Specijalno u točci $(x, f(x))$ imamo $f(x) = k_R x$, te $k_N = -1/k_T = -1/f'(x)$, gdje je k_T nagib tangente. Slijedi

$$\frac{f}{x} = \frac{k_N^2 - 1}{2k_N} = \frac{\frac{1}{f'^2} - 1}{-2\frac{1}{f'}} = \frac{f'^2 - 1}{2f'} \ ,$$

odnosno

$$f'^2 - 2\frac{f}{x}f' - 1 = 0 \ , \tag{2.6}$$

čime smo dobili nelinearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda. Kako je dana jednadžba homogena, koristimo supstituciju $f/x = u$, pa imamo

$$(u'x)^2 = u^2 + 1 \ ,$$

odnosno

$$\frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{dx}{x} \ ,$$

čime je rješenje dano s $\ln(u + \sqrt{u^2+1}) = \ln x + C$. Sređivanje danog izraza vodi na

$$f(x) = \frac{Cx^2}{2} - \frac{1}{2C} \ ,$$

čime vidimo da je traženi oblik zrcala parabola. Ako odaberemo da se dno zrcala nalazi u $f(0) = -R$, tada je $C = \frac{1}{2R}$. Negativni korijen diferencijalne jednadžbe (2.6) daje rješenje u kojem je parabola okrenuta prema dolje.

2.2 ♣ ZADACI

1. Riješite slijedeće jednadžbe
   a) $x^2dy - (x^2 - xy + y^2)dx = 0$,
   b) $(x^4 + y^2)dx - xydy = 0$.
2. Riješite slijedeće jednadžbe

a) $y' - 2xy = x^3$,

b) $y' + \operatorname{tg} xy = \cos x$,

c) $y' + \operatorname{tg} xy = \frac{1}{\sin^2 x}$.

3. Riješite slijedeće jednadžbe

a) $y' - 2xy = x$, $y(0) = 1/2$,

b) $y' - y = \sin x$, $y'(0) = 0$,

c) $y' + e^x y = e^x$, $y(0) = 2$,

d) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$, $y(\pi) = 1$,

e) $y' + \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x$, $y(0) = 1$.

4. Riješite linearnu diferencijalnu jednažbu prvog reda tako da pretpostavite rješenje oblika $y(x) = C(x)u(x)$, gdje je $u(x)$ rješenje sustava s $Q(x) = 0$, a $C(x)$ nepoznata funkcija.

5. Efikasnost motora zrakoplova ovisi o pritisku zraka i maksimalna je na 11 km. Pronađite pritisak $y(x)$ na toj visini ako je poznato da je sama promjena $y'(x)$ je proporcionalna pritisku, te da se na 5 km pritisak smanji za pola svoje vrijednosti y_0 na nula nadmorske visine.

6. Padobranac skače iz aviona i u trenutku skoka otvara padobran. Ako je sila koja nastaje zbog otvorenog padobrana proporcionalna kvadratu brzine $-bv^2$, pronađite brzinu v_0 u trenutku kad dodirne Zemlju. Radi jednostavnosti pretpostavite da je v_0 dan u trenutku $t \to \infty$.

7. Brzina isparavanja sferične kapljice tekućine je proporcionalna njenoj površini. Uz pretpostavku konstantne gustoće, pronađite polumjer kapljice kao funkciju vremena.

8. Prema Newtonovu zakonu hlađenja, brzina hlađenja tijela proporcionalna je razlici temperature tijela T, i temperature okoline, s konstantom proporcionalnosti k. Ako pretpostavimo da se tijelo u početnom trenutku nalazi na temperaturi $T(0) = 2T_0$ te da se temperatura okoline smanjuje po zakonu $T_0(1 + e^{-bt})$ gdje su T_0 i b nekakve konstante, pronađite kako se mijenja temperatura tijela. Kolika je temperatura u $t \to \infty$?

§ 2.3 Linearne diferencijalne jednadžbe višeg reda

Za razliku od linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda, već za linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda ne postoji zatvoreni oblik rješenja, no većina jednadžbi se može riješiti analitički.

Ovdje promatramo dvije klase jednadžbi: s konstantnim koeficijentima, te koeficijentima ovisnim o varijabli.

Homogena linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima

Ova klasa diferencijalnih jednadžbi rješava se metodom **karakterističnog polinoma**. Metoda je sasvim općenita, tj. njome se mogu rješiti jednadžbe proizvoljnog reda iz ove klase. Homogena linearna diferencijalna jednadžba prvog reda

$$y'(x) + a_0 y(x) = 0 \ ,$$

s konstantnim koeficijentom a_0 je separabilna i njen integral je eksponencijalna funkcija $y(x) = Ce^{\lambda x}$, gdje je λ nepoznata konstanta. Određujemo ju tako da dani integral zadovoljava diferencijalnu jednadžbu. Slijedi $\lambda + a_0 = 0$, odnosno $\lambda = -a_0$.

Diferencijalna jednadžba drugog reda glasi

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \ ,$$

gdje su a_0, a_1 konstante. Pod pretpostavkom rješenja oblika $y(x) = Ce^{\lambda x}$, rješavanje diferencijalne jednadžbe svodimo na traženje rješenja karakterističnog polinoma

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \ .$$

Ovisno o **spektru** danog polinoma, rješenja mogu biti

a) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \ .$$

b) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2$
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} \ .$$

c) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$, $\lambda_2 = \lambda_1^*$
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_1^* x} \ .$$

Traženje rješenja u obliku eksponencijalne funkcije možemo shvatiti kao svojevrsni proces **dijagonalizacije**. Naime, eksponencijalna funkcija se može shvatiti kao **svojstveni vektor** operatora derivacije

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \ ,$$

a λ njegova **svojstvena vrijednost**. Traženjem nultočaka karakterističnog polinoma mi svodimo diferencijalnu jednadžbu na formu

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right) y(x) = 0 \ ,$$

čime smo sveli sustav na dvije diferencijalne jednadžbe prvog reda.

Primjer 2.17. Pronađite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y''(x) - 2ay'(x) + a^2 y = 0 \ ,$$

gdje je $a > 0$.

R. Jednadžba predstavlja najopćenitiji mogući slučaj u kojem karakteristični polinom ima jednaka rješenja: $\lambda_1 = \lambda_2 = a$. Prvo rješenje je $y_1(x) = e^{ax}$, dok ćemo drugo naći metodom varijacije konstanti. Pretpostavimo $y_2(x) = C(x)e^{ax}$. Tada

$$y' = C'e^{ax} + aCe^{ax} \ ,$$

$$y'' = C'' + 2aC'e^{ax} + a^2Ce^{ax} \ .$$

Ubacivanjem u diferencijalnu jednadžbu dobivamo jednostavno $C'' = 0$, pa je $C(x) = Ax + B$. Kako drugo rješenje mora biti linearno nezavisno, slijedi $y_2(x) = xe^{ax}$.

Za diferencijalne jednadžbu n-tog reda s konstantnim koeficijentima dobivamo karakteristični polinom n-tog stupnja. Ako on ima nultočku λ kratnosti k, tada rješenja pišemo u obliku

$$y_1(x) = e^{\lambda x} \ , \qquad y_2(x) = xe^{\lambda x} \ , \ldots , y_k(x) = x^{k-1}e^{\lambda x} \ .$$

Primjer 2.18. Pronađite rješenje homogenih jednadžbi

a) $y^{(4)} - 16y = 0$,

b) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

R. a) Pod pretpostavkom da je rješenje oblika $e^{\lambda x}$ karakteristična jednadžba je oblika $\lambda^4 - 16 = 0$, gdje su rješenja $\lambda = \pm 2, \pm 2i$. Općenito rješenje je stoga dano s

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} + C\cos(2x) + D\sin(2x) \ .$$

b) Karakteristična jednadžba je $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ s nultočkama $\lambda = \pm i$. Kako imamo samo dvije različite λ, superpozicija linearno nezavisnih rješenja glasi

$$y(x) = A\cos x + Bx\cos x + C\sin x + Dx\sin x \ .$$

Na dalje se ograničavamo na diferencijalne jednadžbe drugog reda. Generička forma je dana s

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = R(x) \ , \tag{2.7}$$

gdje su funkcije $P(x)$, $Q(x)$ te $R(x)$ analitičke na području od interesa. Ako rješenja homogene diferencijalne jednadžbe označimo s $u_1(x)$ i $u_2(x)$, tada, pod uvjetom da je jedno rješenje poznato, drugo možemo dobiti na slijedeći način

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{u_1}\right) = \frac{u_1u_2' - u_2u_1'}{u_1^2} = \frac{W(x)}{u_1^2} \ ,$$

pa uz jednadžbu (2.2), imamo

$$u_2(x) = u_1(x)\int^x \exp\left[-\int^s P(u)du\right]\frac{ds}{[u_1(s)]^2} \ , \tag{2.8}$$

gdje je izostavljena proizvoljna konstanta. Alternativno, rješenje smo mogli pronaći i metodom varijacije konstanti.

Metoda varijacije konstanti

Već smo upoznali **metodu varijacije konstanti**. U ovom odjeljku koristiti ćemo ju za rješavanje nehomogenih diferencijalnih jednadžbi. Neka su $u_{1,2}(x)$ rješenja homogene diferencijalne jednadžbe, odnosno neka je općenito homogeno rješenje dano s

$$y_H(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) \ ,$$

gdje su $C_{1,2}$ konstante. Tada je **partikularno** rješenje definirano s

$$y_P(x) = C_1(x) u_1(x) + C_2(x) u_2(x) \ , \tag{2.9}$$

tako da je ukupno rješenje

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) \ .$$

Funkcije $C_{1,2}(x)$ su dane slijedećim izrazima

$$C_1(x) = -\int^x \frac{u_2(s)R(s)}{W(s)}\, ds \, , \qquad C_2(x) = \int^x \frac{u_1(s)R(s)}{W(s)}\, ds \ . \tag{2.10}$$

Primjer 2.19. Pronađite rješenje diferencijalne jednadžbe (2.7) ako su poznata homogena rješenja $u_1(x)$, $u_2(x)$.

R. Korisitimo metodu varijacije konstanti. Pretpostavljamo da je partikularno rješenje oblika (2.9). Ako to rješenje stavimo u (2.7), dobivamo samo jedan uvjet na C_1 i C_2. Treba nam još jedan uvjet da bi imali sustav jednadžbi za C_1 i C_2. Pogledajmo sad

$$y_P' = C_1' u_1 + C_2' u_2 + C_1 u_1' + C_2 u_2' \ .$$

Standardni odabir drugog uvjeta je

$$C_1' u_1 + C_2' u_2 = 0 \ . \tag{2.11}$$

Tada

$$y_P'' = C_1' u_1' + C_1 u_2'' + C_2' u_2' + C_2 u_2'' \ .$$

Uvrštavanjem u (2.7) dobivamo

$$C_1' u_1' + C_2' u_2' = R \ , \tag{2.12}$$

gdje smo iskoristili da su u_1 i u_2 rješenja homogenog sustava. Jednadžbe (2.11) i (2.12) daju sustav

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \ .$$

Uvjet za egzistenciju rješenja garantira činjenica da je determinanta matrice na lijevoj strani jednadžbe upravo Wronskijan, što je i djelomično opravdanje odabira (2.11). Drugo opravdanje je činjenica da gornji sustav daje diferencijalnu jednadžbu *prvog* reda za C_1 i C_2

$$C_1' = -\frac{Ru_2}{W} \, , \qquad C_2' = \frac{Ru_1}{W} \ ,$$

čije je rješenje (2.10).

Primjer 2.20. Pronađite nehomogeno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' - y' = e^{2x}\cos(e^x)\ ,$$

uz početne uvjete $y(0) = y'(0) = 0$

R. Rješenje homogene jednadžbe $y'' - y' = 0$ je dano preko karakterističnog polinoma $\lambda^2 - \lambda = 0$, odnosno $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Tada je

$$y_H(x) = C_1 + C_2 e^x\ .$$

Za naći partikularno rješenje treba nam Wronskijan

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x\ .$$

Slijedi

$$C_1(x) = -\int^x \frac{e^s\, e^{2s}\cos(e^s)}{e^s}\, ds = -\int^x e^{2s}\cos(e^s)\, ds = -e^x\sin(e^x) - \cos(e^x)\ .$$

Slično

$$C_2(x) = \int^x \frac{e^{2s}\cos(e^s)}{e^s}\, ds = sin(e^x)\ .$$

Ukupno rješenje je

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1 + C_2 e^x - \cos(e^x)\ .$$

Početni uvjeti $y(0) = y'(0) = 0$ definiraju integracijske konstante

$$C_1 = \sin 1 + \cos 1\,, \qquad C_2 = -\sin 1\ .$$

Primjer 2.21. Pronađite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + \omega^2 y = f(x)\ ,$$

gdje je $f(x)$ neka funkcija.

R. Diferencijalna jednadžba predstavlja harmonički oscilator bez gušenja s prisilom $f(x)$. Rješenja karakterističnog polinoma su $\lambda = \pm i\omega$. Općenito homogeno rješenje prikladno zapisujemo preko trigonometrijskih funkcija

$$y_H(x) = C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x)\ .$$

Wronskijan je

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(\omega x) & \sin(\omega x) \\ -\omega\sin(\omega x) & \omega\cos(\omega x) \end{vmatrix} = \omega\ .$$

Sada možemo napisati partikularno rješenje

$$\begin{aligned} y_P(x) &= C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x) \\ &= \cos(\omega x)\left(-\frac{1}{\omega}\right)\int^x \sin(\omega s) f(s) ds + \sin(\omega x)\frac{1}{\omega}\int^x \cos(\omega s) f(s) ds \\ &= \frac{1}{\omega}\int^x \sin\left[\omega(x-s)\right] f(s) ds\ . \end{aligned}$$

Ukupno rješenje je

$$y(x) = C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x) + \frac{1}{\omega}\int^x \sin\left[\omega(x-s)\right] f(s) ds\ .$$

Primjer 2.22. Pronađite rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe

$$(x^2+x)y''+(2-x^2)y'-(2+x)y=x(x+1)^2\ ,$$

ako jedno rješenje homogene diferencijalne jednadžbe glasi $u_1(x)=e^x$.

R. Podijelimo prvo cijelu jednadžbu s funkcijom uz drugu derivaciju

$$y''+\frac{2-x^2}{x(x+1)}y'-\frac{2+x}{x(x+1)}y=x+1\ .$$

Drugo homogeno rješenje tražimo pomoću (2.8). Računamo

$$\int^s P(u)\,du=\int^s\frac{2-u^2}{u(u+1)}\,du=\int^s\frac{2-u^2}{u}\,du-\int^s\frac{2-u^2}{u+1}\,du\ .$$

Prvi i drugi integral daju

$$\int^s\frac{2-u^2}{u}\,du=2\ln|s|-\frac{s^2}{2}\ .$$

$$\int^s\frac{2-u^2}{u+1}\,du=-\frac{1}{2}(s+1)^2+2(s+1)+\ln|s+1|\ ,$$

čime

$$\int^s P(u)\,du=\ln\left|\frac{s^2}{s+1}\right|-s-\frac{3}{2}\ .$$

Uvrštavanje u (2.8) daje

$$\frac{u_2(x)}{u_1(x)}=\int^x\frac{s+1}{s^2}e^s\,\frac{ds}{e^{2s}}=\int^x\left(\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-s}}{s^2}\right)ds=-\frac{e^{-x}}{x}\ ,$$

do na proizvoljnu konstantu. Slijedi da je $u_2(x)=1/x$. Wronskijan sustava je

$$W(x)\ =\ \begin{vmatrix} e^x & \frac{1}{x} \\ e^x & -\frac{1}{x^2}\end{vmatrix}=-\frac{e^x}{x^2}(x+1)\ .$$

Primjetimo da je u regularnim singularnim točkama $W(-1)=0$, odnosno $W(0)\to\infty$. Stoga

$$C_1(x)=\int^x\frac{\frac{1}{s}(s+1)}{-\frac{e^s}{s^2}(s+1)}\,ds=\int^x se^{-s}\,ds=-e^{-x}(x+1)\ .$$

$$C_2(x)=\int^x\frac{e^s(s+1)}{-\frac{e^s}{s^2}(s+1)}\,ds=-\int^x s^2\,ds=-\frac{x^3}{3}\ .$$

Ukupno rješenje je

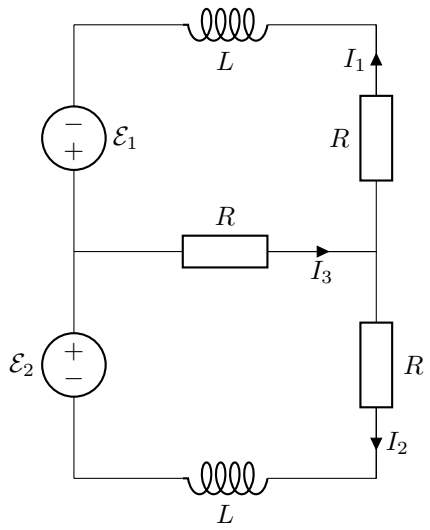
$$y(x)=C_1e^x+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{3}-x-1\ .$$

Sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi

U ovom odjeljku rješavamo linearne sustave običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Općeniti sustav jednadžbi za $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ nepoznanica dan je s

$$y_1'=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots a_{1n}y_n+q_1\ ,$$

$$y_2'=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots a_{2n}y_n+q_2\ ,$$



Slika 2.3: Prikazan je strujni krug sa dvije zavojnice induktiviteta L i tri otpornika otpora R. Oba izvora daju vremenski ovisni potencijal $\mathcal{E}_{1,2}(t)$.

$$\vdots$$
$$y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots a_{nn}y_n + q_n \ ,$$

gdje je $q_1(x), \ldots, q_n(x)$ nehomogenost sustava, zapisujemo u matričnu formu

$$y' = Ay + q \ , \tag{2.13}$$

gdje su

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} , \qquad q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix} , \tag{2.14}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} . \tag{2.15}$$

U slučaju kada je A konstantna matrica općenito rješenje je dano s

$$y(x) = e^{Ax}C + \int^x e^{-A(s-x)}q(s)ds \ , \tag{2.16}$$

gdje je C neki vektor.

Primjer 2.23. Pronađite struje $I_{1,2,3}$ za strujni krug na slici 2.3. Vremenska ovisnost izvora napona je

$$\mathcal{E}_1(t) = -\mathcal{E}_2(t) = \begin{cases} \mathcal{E}_0 \ , & |t| < t_0 \\ 0 \ , & |t| \geq t_0 \end{cases} .$$

R. Po Kirchoffovom pravilima imamo

$$-\mathcal{E}_1 + I_3 R + I_1 R + \frac{dI_1}{dt} L = 0 \,,$$

$$-\mathcal{E}_2 + I_3 R + I_2 R + \frac{dI_2}{dt} L = 0 \,,$$

te $I_1 + I_2 = I_3$. Slijedi

$$\frac{dI_1}{dt} + \frac{R}{L} I_1 + \frac{R}{L}(I_1 + I_2) = \frac{\mathcal{E}_1}{L} \,,$$

$$\frac{dI_2}{dt} + \frac{R}{L} I_2 + \frac{R}{L}(I_1 + I_2) = \frac{\mathcal{E}_2}{L} \,,$$

gdje prepoznajemo sustav (2.13) uz

$$y(t) = \begin{pmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{pmatrix} \,, \qquad q(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(t)/L \\ \mathcal{E}(t)/L \end{pmatrix} \,, \qquad A = \begin{pmatrix} -2R/L & -R/L \\ -R/L & -2R/L \end{pmatrix} \,.$$

Za pronaći općenito rješenje valja eksponencirati matricu A. To ćemo učiniti tako da je prvo dijagonaliziramo, tj. nađemo joj svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti. Svojstvene vrijednosti λ su dane pomoću

$$\det(A - \lambda) = 0 \,, \qquad \left(\lambda + \frac{2R}{L}\right)^2 - \frac{R^2}{L^2} = 0 \,,$$

s rješenjima $\lambda_1 = -3R/L$, te $\lambda_2 = -R/L$. Svojstvene vektore $v_{1,2}$ nalazimo pomoću jednadžbe

$$A v_i = \lambda_i v_i \,.$$

Rješenja glase

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \,.$$

Dijagonalizacija matrice A definirana je pomoću

$$D = S^{-1} A S \,,$$

gdje je $D = \mathrm{diag}(-3R/L, -R/L)$ te

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \,,$$

predstavlja matricu prijelaza koja je konstruirana od normiranih svojstvenih vektora. Ukupno rješenje možemo zapisati kao zbroj homogenog i partikularnog rješenja

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = e^{At} C + \int^t e^{-A(s-t)} q(s) ds \,.$$

Eksponent matrice A sad možemo lako izračunati

$$e^{At} = S e^{Dt} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{3R}{L}t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{R}{L}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \,,$$

čime je homogeno rješenje

$$y_h(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\left(\frac{R}{L}t\right) & -\mathrm{sh}\left(\frac{R}{L}t\right) \\ -\mathrm{sh}\left(\frac{R}{L}t\right) & \mathrm{ch}\left(\frac{R}{L}t\right) C \end{pmatrix} \,.$$

Partikularno rješenje je dano s

$$y_p(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{2R}{L}t} \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{2R}{L}s} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{R}{L}(t-s)\right) & -\operatorname{sh}\left(\frac{R}{L}(t-s)\right) \\ -\operatorname{sh}\left(\frac{R}{L}(t-s)\right) & \operatorname{ch}\left(\frac{R}{L}(t-s)\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1(t) \\ \mathcal{E}_2(t) \end{pmatrix} ds$$
$$= \frac{1}{L} e^{-\frac{2R}{L}t} \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{2R}{L}s} e^{-\frac{R}{L}(t-s)} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1(s) \\ -\mathcal{E}_1(s) \end{pmatrix} ds \ .$$

Na području $s < -t_0$ funkcija $\mathcal{E}_1(s) = 0$, pa je i $y_p(t) = 0$. Ako je $-t_0 < s < t_0$, imamo

$$y_p(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-\frac{R}{L}t} \int_{-t_0}^{t} e^{\frac{R}{L}s} \, ds = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t+t_0)}\right) \ .$$

Konačno, ako je $t > t_0$

$$y_p(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-\frac{R}{L}t} \int_{-t_0}^{t_0} e^{\frac{R}{L}s} \, ds = \frac{2\mathcal{E}_0}{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-\frac{R}{L}t} \operatorname{sh}\left(\frac{R}{L}t_0\right) \ .$$

Frobeniusova metoda

Promatramo diferencijalne jednadžbe tipa (2.7) za slučaj $R(x) = 0$. Točka $x = x_0$ je **obična** točka diferencijalne jednadžbe ako su $P(x)$ i $Q(x)$ analitičke u x_0. Ako je x_0 singularitet funkcija $P(x)$ i $Q(x)$, ali tako da su $(x - x_0)P(x)$ i $(x - x_0)^2 Q(x)$ analitičke u x_0, onda kažemo da je to **regularna singularna** točka.

Napomenimo da je translacijom točku x_0 moguće poslati u ishodište. Isto tako, transformacijom $x = 1/t$ možemo analizirati ponašanje u beskonačnosti.

Vrijede slijedeći teoremi:

Teorem 2.5. *Ako je ishodište obična točka, onda je bilo koje rješenje analitičko u $x = 0$.*

Teorem 2.6. (Fuchs) *Ako je ishodište regularna singularna točka, onda su rješenja diferencijalne jednadžbe analitičke u ishodištu, ili imaju pol ili točku grananja logaritamskog tipa.*

Fuchsov teorem omogućava prikaz rješenja diferencijalne jednadžbe pomoću **Frobeniusovog reda**

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} \ , \tag{2.17}$$

gdje je $\lambda \in \mathbb{C}$. Zahtijevanjem da (2.17) zadovoljava diferencijalnu jednadžbu dobijemo rekurzijske relacije za koeficijente a_n. Rekurzijske relacije za najniže koeficijente definiraju **indicijalnu** jednadžbu iz koje računamo λ. Ovisno o korijenima indicijalne jednadžbe imamo niz slučajeva. Ako su $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ stavimo $\lambda_1 \geq \lambda_2$, za prvo rješenje uvijek imamo

$$y_1(x) = x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1) x^n \ .$$

Drugo rješenje ovisi o odnosu λ_1 i λ_2:

a) ako $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$, i drugo rješenje je tipa (2.17), odnosno

$$y_2(x) = x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_2) x^n \ .$$

b) ako $\lambda_1 = \lambda_2$, imamo

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\lambda_2) x^n \ . \tag{2.18}$$

Ovo rješenje se generira pomoću formule

$$y_2(x) = \frac{\partial y(\lambda, x)}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_1} \ . \tag{2.19}$$

c) ako $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{N}$, imamo

$$y_2(x) = d_{-1} y_1(x) \ln x + x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\lambda_2) x^n \ . \tag{2.20}$$

Ovdje valja biti oprezan, i prvo isprobati Frobeniusovu metodu s λ_2; ako dobijemo drugo linearno nezavisno rješenje, onda je to $y_2(x)$ uz $d_{-1} = 0$. U protivnom koristimo

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[(\lambda - \lambda_2) y(\lambda, x) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_2} \ . \tag{2.21}$$

U slučaju kada su $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ onda su to kompleksno konjugirana rješenja indicijalne jednadžbe. Slijedi jednostavan primjer takve situacije.

Primjer 2.24. Razvojem oko ishodišta pronađite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$x^2 y'' + x y' + y = 0 \ .$$

R. Ako rješenje napišemo u obliku Frobeniusovog reda

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} \ ,$$

diferencijalna jednadžba postaje

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[(n+\lambda)(n+\lambda-1) + n + \lambda + 1 \right] x^{n+\lambda} = 0 \ .$$

Svaki pripadni koeficijent uz potenciju mora iščezavati, što vodi na

$$a_n[(n+\lambda)^2 + 1] = 0 \ .$$

Indicijalna jednadžba je dana za $n = 0$: $\lambda^2 + 1 = 0$, što daje $\lambda_{1,2} = \pm i$. S druge strane za $n \neq 0$ imamo da su svi $a_n = 0$. Dakle, Frobeniusov red u ovom jednostavnom slučaju ima jedan član, te su rješenja

$$y_{1,2} = x^{\pm i} \ ,$$

gdje smo zanemarili multiplikativni faktor a_0. Općenito rješenje za $x > 0$ je

$$y(x) = Ax^i + Bx^{-i} = Ae^{i\ln x} + Be^{-i\ln x} = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)\ .$$

Prethodna diferencijalna jednadžba predstavlja specijalan slučaj **Eulerove jednadžbe** koju ćemo rješiti u kompleksnoj ravnini. U ovom slučaju je ujedno i najednostavnije razumijeti pojavu logaritma u drugom rješenju.

Primjer 2.25. Rješite Eulerovu diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + \frac{p_0}{z}y' + \frac{q_0}{z^2}y = 0\,, \qquad z \in \mathbb{C}^x\ . \tag{2.22}$$

R. Funkcije $P(z) = p_0/z$, te $Q(z) = q_0/z^2$ daju degenerirani primjer diferencijalne jednadžbe s regularnom singularnom točkom u $z = 0$. Domena diferencijalne jednadžbe $\mathbb{C}^x$ nije **jednostavno povezana**. To za posljedicu ima da rješenje ne mora biti dobro definirano na svim točkama $\mathbb{C}^x$. Ideja je stoga preslikati gornju diferencijalnu jednadžbu u jednostavno povezanu domenu. To možemo postići uvođenjem reza u kompleksnu ravninu, čime domena $\mathbb{C}\backslash\langle-\infty, 0]$ postaje jednostavno povezana. Motivirani smo uvesti supstituciju $u = \ln z$, čime vidimo da se problematična točka $z = 0$ sada nalazi u $u = -\infty$. Imamo

$$f'' + (p_0 - 1)f' + q_0 f = 0\ ,$$

gdje je $f(u) = y(e^u)$. Dobili smo diferencijalnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima, koju znaamo rješiti. Korijeni karakterističnog polinoma su

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 - p_0 \pm \sqrt{(p_0-1)^2 - 4q_0}\right)\ . \tag{2.23}$$

Ako su $\lambda_1 \neq \lambda_2$, rješenja su $y_{1,2}(z) = z^{\lambda}_{1,2}$. S druge strane, ako $\lambda_1 = \lambda_2$, imamo $y_1(z) = z^{\lambda}_1$, $y_2(z) = z^{\lambda_1}\ln z$.

Na slijedećem primjeru ilustriramo kako se logaritamsko rješenje generira u općenitoj situaciji.

Primjer 2.26. Pokažite da diferencijalna jednadžba

$$y'' + P(z)y' + Q(z) + y = 0\ , \tag{2.24}$$

može dati rješenje logaritamskog tipa ako se korijeni indicijalnog polinoma odnose kao $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{N}_0$, gdje je $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

R. Neka je $z = 0$ regularna singularna točka. Tada P i Q imaju slijedeći Laurentov razvoj

$$P(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0} p_n z^n\,, \qquad Q(z) = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n\ .$$

Tražimo rješenje u obliku (2.17), gdje b.s.o. uzimamo $a_0 = 1$. Tada

$$Q(z)y(z) = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\lambda} = z^{\lambda-2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} q_k a_{n-k} z^n \ ,$$

$$P(z)y'(z) = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n z^{n+\lambda-1} = z^{\lambda-2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(\lambda+n-k)p_k a_{n-k} z^n \ ,$$

$$y''(z) = z^{\lambda-2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n z^n \ .$$

Uvrštavanjem u (2.24) imamo

$$\lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0 = 0 \ ,$$

za $n = 0$, dok za $n > 0$

$$[(n+\lambda)^2 + (p_0-1)(n+\lambda) + q_0]a_n + \sum_{k=1}^{n}[(n+\lambda-k)p_k + q_k]a_{n-k} = 0 \ .$$

Indicijalna jednadžba daje rješenja koja su identična onima koje smo imali za Eulerovu jednadžbu (2.23). Uz odabir $\mathrm{Re}(\lambda_1) \geq \mathrm{Re}(\lambda_2)$, za $\lambda = \lambda_1$, te $n > 0$ imamo

$$(\lambda_1 - \lambda_2 + n)na_n = -\sum_{k=1}^{n}[(n+\lambda-k)p_k + q_k]a_{n-k} \ ,$$

iz čega vidimo da formalno možemo naći koeficijente a_n za proizvoljni n. S druge strane, za $\lambda = \lambda_2$

$$(\lambda_2 - \lambda_1 + n)na_n = -\sum_{k=1}^{n}[(n+\lambda-k)p_k + q_k]a_{n-k} \ , \tag{2.25}$$

čime lijeva strana može biti nula za neki $n = m$ ako je $\lambda_1 = \lambda_2 + m$, $m \in \mathbb{N}_0$. U tom slučaju svi a_n, za $n = 1, \ldots, m-1$ su definirani rekurzijom (2.25), dok za $n = m$ dobivamo

$$0 = \sum_{k=1}^{n}[(n+\lambda-k)p_k + q_k]a_{n-k} \ . \tag{2.26}$$

Ako se desi da su a_n, $n = 1, \ldots, m-1$, baš takvi da je ova jednadžba zadovoljena, onda je a_m proizvoljan, što proizlazi iz činjenice da smo uvijek u mogućnosti rješenju y_2 dodati $Cy_1(z)$, gdje je C proizvoljna konstanta. Preostali koeficijenti za $n > m$ su opet dani rekurzijom (2.25).

S druge strane, ako jednadžba (2.26) nije zadovoljena, drugo rješenje možemo pronaći metodom varijacije konstanti, tako da tražimo rješenje oblika $y_2(z) = c(z)y_1(z) = c(z)z_1^{\lambda}h_1(z)$. Tada $c(z)$ zadovoljava slijedeću diferencijalnu jednadžbu

$$c'' + \left[2\frac{\lambda_1}{z} + 2\frac{h_1'(z)}{h_1(z)} + P(z)\right]c'(z) = 0 \ .$$

Izraz u uglatoj zagradi ima slijedeći razvoj oko $z = 0$

$$\left[2\frac{\lambda_1}{z} + 2\frac{h_1'(z)}{h_1(z)} + P(z)\right] = \frac{1-\lambda_2+\lambda_1}{z} + 2h_1'(0) + p_1 + \ldots \ .$$

Zaključujemo da je $c'(z)$ moguće zapisati u Frobeniusov red

$$c'(z) = z^{\lambda_2-\lambda_1-1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \ , \qquad c_0 \neq 0 \ .$$

Integracija ovog izraza vodi na

$$c(z) = z^{\lambda_2-\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_2-\lambda_1+n} z^n \ ,$$

ako je $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}_0$, te

$$c(z) = z^{\lambda_2-\lambda_1} \sum_{n=0, n\neq m}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_2-\lambda_1+n} z^n + c_m \ln z \ ,$$

ako je $\lambda_1 - \lambda_2 = m \in \mathbb{N}_0$.

Napomenimo da osim u slučaju kada je $m = 0$, može se dogoditi da je $c_m = 0$. To je upravo situacija u kojoj je uvjet (2.25) zadovoljen. U praksi nije zgodno tražiti koeficijente iz gornjih relacija, s obzirom da to zahtijeva zatvorenu formu reda potencija funkcije $h_1'(z)/h_1(z)$. No kada znamo koji oblik rješenja možemo očekivati puno je jednostavnije koristiti (2.18) i (2.20). U konkretnim primjerima koristi se još jednostavnija ekvivalentna forma (2.19) i (2.21).

Primjer 2.27. Razvojem oko ishodišta pronađite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$2x^2y'' - xy' + (1-x)y = 0 \ .$$

R. Ishodište predstavlja regularnu singularnu točku, pa rješenje tražimo u obliku Frobeniusovog reda. Diferencijalna jednadžba postaje

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[2a_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)x^{n+\lambda} - a_n(n+\lambda)x^{n+\lambda} + a_n x^{n+\lambda} - a_n x^{n+\lambda+1} \right] = 0 \ ,$$

odnosno

$$[2a_0\lambda(\lambda-1) - a_0\lambda + a_0]x^{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[2a_n(n+\lambda)(n+\lambda-1) - a_n(n+\lambda) + a_n - a_{n-1} \right] x^{n+\lambda} = 0 \ ,$$

gdje smo izdvojili nulti član iz beskonačnog reda, odnosno skupili sve faktore uz $x^{n+\lambda}$. Po linearnoj nezavisnosti koeficijenti uz svaku potenciju moraju iščezavati. Specijalno, ako je $a_0 \neq 0$, iščezavanje koeficijenta uz x^{λ} definira indicijalnu jednadžbu $2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, čija su rješenja $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$. Više potencije definiraju rekurziju između koeficijenata a_n

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2(n+\lambda)^2 - 3(n+\lambda) + 1} \ .$$

Ako u taj izraz stavimo λ_1 dobivamo

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n+1)} = \frac{a_{n-2}}{n(2n+1)(n-1)(2n-1)} = \cdots = \frac{a_0}{n!(2n+1)!!} \ ,$$

čime je prvo rješenje određeno do na multiplikativni faktor

$$y_1(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(2n+1)!!} \ .$$

Za drugo rješenje koristimo λ_2

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n-1)} = \frac{a_{n-2}}{n(2n-1)(n-1)(2n-3)} = \cdots = \frac{a_0}{n!(2n-1)!!} \ .$$

Drugo rješenje je stoga

$$y_2(x) = x^{1/2} + x^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!(2n-1)!!} \ .$$

Kako $(2n-1)!!$ nije definiran za $n = 0$, taj član je eksplicitno izdvojen iz sume.

Primjer 2.28. Pronađite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \ ,$$

razvojem oko ishodišta.

R.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)x^{n+\lambda} + a_n(n+\lambda)x^{n+\lambda} + a_n x^{n+\lambda+2} \right] = 0 \ .$$

Napišimo sad diferencijalnu jednadžbu na slijedeći način

$$a_0[\lambda(\lambda-1)+\lambda]x^{\lambda} + a_1[(\lambda+1)\lambda+\lambda+1]x^{\lambda+1} + \sum_{n=2}^{\infty}[a_n(n+\lambda)(n+\lambda-1) + a_n(n+\lambda) + a_{n-2}]x^{n+\lambda} = 0 \ .$$

Ovdje smo pažljivo izdvojili i prvi i drugi član u sumi. Prvi član nam daje indicijalnu jednadžbu $a_0\lambda^2 = 0$ iz čega očitavamo $\lambda_{1,2} = 0$, za $a_0 \neq 0$. Drugi član daje uvjet $a_1(\lambda+1)^2 = 0$ što za $\lambda = 0$ može biti zadovoljeno samo za $a_1 = 0$. Uz potencije $n \geq 2$ očitavamo rekurziju za a_n

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+\lambda)^2} \ ,$$

Vidimo da su sve parne potencije vezane na a_0. Sve neparne potencije iščezavaju jer su vezane na a_1. Prvo rješenje tražimo uvrštavanjem $\lambda = 0$ u rekurziju

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{(2n)^2} = (-1)^2\frac{a_{2n-4}}{(2n)^2(2n-2)^2} = \cdots = (-1)^n\frac{a_0}{[(2n)!!]^2} \ ,$$

što se može napisati kao

$$a_{2n} = (-1)^n\frac{a_0}{2^{2n}(n!)^2} \ .$$

Prvo rješenje je stoga

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} \ .$$

Drugo rješenje dobijemo tako da prvo deriviramo općenito rješenje po λ

$$\frac{\partial y}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}(\lambda)x^{2n}\Big|_{\lambda=0} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial a_{2n}}{\partial\lambda}x^{2n+\lambda}\Big|_{\lambda=0}$$
$$= a_0y_1(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial a_{2n}(\lambda)}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0}x^{2n} \ ,$$

gdje smo uzeli u obzir da je $\partial a_0/\partial\lambda = 0$. Napišimo koeficijent a_{2n} za općeniti λ

$$a_{2n}(\lambda) = (-1)^n\frac{a_0}{(\lambda+2)^2(\lambda+4)^2\ldots(\lambda+2n)^2} \ .$$

Promotrimo

$$\ln\left[\frac{1}{(\lambda+2)^2\dots(\lambda+2n)^2}\right] = \\ -2\ln\left[(\lambda+2)\dots(\lambda+2n)\right] = -2\left[\ln(\lambda+2)+\dots+\ln(\lambda+2n)\right] \ .$$

Ako taj izraz deriviramo po λ

$$(\lambda+2)^2\dots(\lambda+2n)^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{(\lambda+2)^2\dots(\lambda+2n)^2}\right] = -2\left[\frac{1}{\lambda+2}+\dots+\frac{1}{\lambda+2n}\right] \ ,$$

i uvrstimo $\lambda = 0$, slijedi

$$2^2\,4^2\dots(2n)^2\left[\frac{1}{(\lambda+2)^2\dots(\lambda+2n)^2}\right]_{\lambda=0} = -2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n}\right) \ ,$$

odnosno

$$\frac{\partial a_{2n}(\lambda)}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0} = (-1)^{n+1}a_0\frac{H_n}{[(2n)!!]^2} \ ,$$

gdje je H_n harmonijski broj. Konačno, do na multiplikativni faktor, drugo rješenje je

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}H_n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} \ .$$

Primjer 2.29. Pronađite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$x^2y'' + (x^2+2x)y' - 2y = 0 \ ,$$

razvojem oko ishodišta.

R. Ubacivanje Frobeniusovog razvoja u diferencijalnu jednadžbu daje

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)x^{n+\lambda} + a_n(n+\lambda)x^{n+\lambda+1} + 2a_n(n+\lambda) - 2a_n\right] \ .$$

Indicijalna jednadžba je

$$a_0(\lambda^2+\lambda-2) = 0 \ ,$$

što za $a_0 \neq 0$ daje $\lambda = 1$, $\lambda = -2$. Rekurziju dobivamo iz uvjeta

$$a_n\left[(n+\lambda)(n+\lambda-1) + 2(n+\lambda) - 2\right] + a_{n-1}(n+\lambda-1) = 0 \ ,$$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n+\lambda+2} \ .$$

Prvo rješenje dobivamo uvrštavanjem $\lambda = \lambda_1$ u rekurziju

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n+3} = (-1)^2\frac{a_{n-2}}{(n+3)(n+2)} = \dots(-1)^n\frac{a_0}{(n+3)!}3! \ .$$

Dakle

$$y_1(x) = 6\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+3)!} = 6\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-3}\frac{x^{n-2}}{n!} = 6(-1)^3x^{-2}\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!} \ .$$

S obzirom na to da je

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!} \ ,$$

prvo rješenje možemo napisati u sažetijem obliku

$$y_1(x) = \frac{6}{x^2}\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}\right) .$$

Za drugo rješenje prvo probamo daje li uvrštavanje $\lambda = \lambda_2$ linearno nezavisno rješenje. Rekurzija je u tom slučaju

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n} = (-1)^2 \frac{a_{n-2}}{n(n-1)} = \cdots = (-1)^n \frac{a_0}{n!} .$$

Drugo rješenje je stoga

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-2}}{n!} = \frac{e^{-x}}{x^2} .$$

S obzirom na to, za prvo rješenje možemo uzeti i jednostavno

$$y_1(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) .$$

Primjer 2.30. Razvojem oko ishodišta pronađite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

R. Ako u diferencijalnu jednadžbu stavimo rješenje u obliku Frobenisuovog reda, imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)x^{n+\lambda} + a_n(n+\lambda)x^{n+\lambda} + a_n x^{n+\lambda+2} - a_n x^{n+\lambda}\right] = 0 .$$

Članovi uz x^λ daju indicijalni polinom

$$a_0\left(\lambda^2 - 1\right) = 0 ,$$

iz čega, ako je $a_0 \neq 0$, očitamo $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Na dalje, u ovom slučaju moramo pogledati i koeficijente uz $x^{\lambda+1}$

$$a_1\left[(\lambda+1)^2 - 1\right] = 0 .$$

Kako je uglata zagrada različita od nule za $\lambda_{1,2}$, tada je gornja jednadžba zadovoljena za $a_1 = 0$. Za $n \geq 2$ imamo rekurziju

$$a_n[(n+\lambda)(n+\lambda-1) + n + \lambda - 1] + a_{n-2} = 0 ,$$

odnosno

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+\lambda-1)(n+\lambda+1)} .$$

Sad možemo naći prvo rješenje. Ako stavimo $\lambda = \lambda_1 = 1$ u rekurziju

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2n(2n+2)} = (-1)^n \frac{a_{2n-4}}{2n(2n-2)(2n+2)2n} = \cdots = (-1)^n \frac{a_0}{(2n)!!(2n+2)!!} ,$$

gdje smo odmah uzeli u obzir da preživljavaju samo parne potencije. Korištenjem $(2n)!! = 2^n n!$, imamo

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{a_0}{n!(n+1)!} ,$$

pa je prvo rješenje

$$y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^{2n}n!(n+1)!}\ .$$

Ako u rekurziju stavimo $\lambda = \lambda_2 = -1$, dobijemo da koeficijenti divergiraju. U ovom slučaju rješenje treba naći drugim putem. Napišimo koeficijent a_{2n} za općeniti λ

$$a_{2n}(\lambda) = \frac{(-1)^n a_0}{(\lambda+1)(\lambda+3)^2\ldots(\lambda+2n-1)^2(\lambda+2n+1)}\ .$$

Drugo rješenje dobijemo iz općenitog rješenja

$$y(\lambda,x) = a_0x^{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}(\lambda)x^{2n+\lambda}\ .$$

pomoću

$$y_2(x) = \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda+1)y(\lambda,x)\right]_{\lambda=-1}\ .$$

Imamo

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda+1)y(\lambda,x) = \ln x\sum_{n=0}^{\infty}[(\lambda+1)a_{2n}(\lambda)]x^{2n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\lambda+1)a_{2n}(\lambda)\right]x^{2n+\lambda}\ .$$

Promotrimo prvi član kada je $\lambda = \lambda_2 = -1$

$$(\lambda+1)a_{2n}(\lambda)\Big|_{\lambda=-1} = \frac{a_0(-1)^n}{2^24^2\ldots(2n-2)^2(2n)} = \frac{a_0(-1)^n}{2^{2n-1}(n-1)!n!}\ ,$$

odnosno

$$(\lambda+1)a_{2n+2}(\lambda)\Big|_{\lambda=-1} = -\frac{1}{2}\frac{a_0(-1)^n}{2^{2n}n!(n+1)!} = -\frac{1}{2}a_{2n}(+1)\ .$$

Prvi član u prvoj sumi je proporcionalan $a_0(\lambda+1)$ što iščezava za $\lambda=-1$, pa za prvu sumu, do na faktor proporcionalnosti, imamo

$$\ln x\sum_{n=0}^{\infty}[(\lambda+1)a_{2n}(\lambda)]x^{2n+\lambda}\Big|_{\lambda=-1} = -\frac{1}{2}y_1(x)\ln x\ ,$$

odnosno $d_{-1} = -1/2$. Za izvrijedniti drugu sumu, izraz

$$\begin{aligned}&\ln\left[\frac{(\lambda+2n+1)}{(\lambda+3)^2\ldots(\lambda+2n-1)^2(\lambda+2n+1)^2}\right]\\ &\quad= \ln(\lambda+2n+1) - 2[\ln(\lambda+3)+\cdots+\ln(\lambda+2n-1)+\ln(\lambda+2n+1)]\ ,\end{aligned}$$

deriviramo po λ

$$\begin{aligned}&(\lambda+3)^2\ldots(\lambda+2n-1)^2(\lambda+2n+1)^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{(\lambda+3)^2\ldots(\lambda+2n-1)^2(\lambda+2n+1)}\right]\\ &\qquad= \frac{1}{\lambda+2n+1} - 2\left[\frac{1}{\lambda+3}+\cdots+\frac{1}{\lambda+2n-1}+\frac{1}{\lambda+2n+1}\right]\ ,\end{aligned}$$

i uvrstimo $\lambda = \lambda_2 = -1$, što vodi na

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{(\lambda+3)^2\ldots(\lambda+2n-1)^2(\lambda+2n+1)}\right]_{\lambda=-1} = \frac{1-2nH_n}{[(2n)!!]^2}\ .$$

Slijedi

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\lambda+1)a_{2n}(\lambda)\right]_{\lambda=-1} = \frac{(-1)^n a_0(1-2nH_n)}{2^{2n}(n!)^2}\ .$$

Sad možemo napisati drugo rješenje

$$y_2(x) = -\frac{1}{2}y_1(x)\ln x + \frac{1}{x}\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-2nH_n)}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\right] .$$

2.3 ♣ ZADACI

1. Metodom varijacije konstanti pronađite rješenja diferencijalnih jednadžbi
   a) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$, $y(1) = y'(1) = e$,
   b) $y'' - 5y' + 6y = e^x + 3e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{2}$,
   c) $y'' + 4y = 3\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$,
   d) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 2x + 1$, $y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = 2$,
   e) $y'' - 2ay' + a^2y = \cos ax$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{1}{2a}$.

2. Pronađite rješenja diferencijalne jednadžbe
$$y''' - 3ay'' + 3a^2y' - a^3y = 0\ ,\ ,\qquad a > 0\ .$$
   Za drugo i treće rješenje koristite metodu varijacije konstanti.

3. Pronađite rješenje diferencijalne jednadžbe
$$y^{(4)} + y'' = 0\,,\qquad y(0) = y''(0) = y'''(0) = 0\,,\ y'(0) = 1\ .$$

4. Pronađite rješenja diferencijalnih jednadžbi
   a) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$,
   b) $y^{(4)} - y = 0$,
   c) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$.

5. Pronađite rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe
$$(x^2-1)y'' - 2xy' + 2x = (x^2-1)^2\ ,$$
   ako je poznato homogeno rješenje $u_1(x) = x$.

6. Pokažite da diferencijalna jednažba prvog reda $u' + p(z)u = 0$, $z \in \mathbb{C}$ ima rješenje u obliku Frobeniusovog reda
$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\lambda}\ ,$$
   akko $p(z)$ ima najviše pol prvog reda.

7. Pronađite rješenje Eulerove diferencijalne jednadžbe
$$3x^2y'' - xy' + y = 0\ ,$$
   koristeći supstituciju $x = e^z$.

8. Pronađite rješenje nehomogenen diferencijalne jednadžbe

   a) $x^2y'' + xy' + y = x$,
   b) $x^2y'' + 3xy' + y = \sqrt{x}$,
   c) $xy'' - (1+x)y' + y = x^3$,
   d) $xy'' - (1+x)y' + y = x^4e^x$.

9. Pronađite rješenje diferencijalne jednadžbe razvojem oko ishodišta

   a) $2x^2y'' + (x^2 - x)y' + y = 0$,
   b) $3x^2y'' - xy' + y = 0$,
   c) $2x^2y'' - xy' + (1-x)y = 0$,
   d) $x^2y'' + xy' + y = 0$.

10. Pronađite rješenje diferencijalne jednadžbe razvojem oko ishodišta

    a) $xy'' + y' + y = 0$,
    b) $xy'' + (1-x)y' + y = 0$,
    c) $x^2y'' - x(1-x)y' + (1-x)y = 0$.

11. Pronađite rješenje diferencijalne jednadžbe razvojem oko ishodišta

    a) $x^2y'' + (x^2 + 2x)y' - 2y = 0$,
    b) $y'' - xy' + 2y = 0$,
    c) $xy'' + (3 + 2x)y' + 4y = 0$.

12. Pronađite rješenje diferencijalne jednadžbe razvojem oko ishodišta

    a) $x(x-2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = 0$,
    b) $(4 - x^2)y'' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,
    c) $x^2y'' + xy' + x^3y = 0$,
    d) $x^2y'' - xy' + (x^2+1)y = 0$,
    e) $xy'' + y' - y = 0$,
    f) $x^2y'' - x(1+x)y' + y = 0$,
    g) $x^2y'' + x(x-2)y' + 2y = 0$,
    h) $xy'' + 2y' + y = 0$.

Poglavlje 3

Fourierova analiza

§ 3.1 Skup kvadratno integrabilnih funkcija

Ovisno o kontekstu, s $L^2([a,b])$ označavamo skup kompleksnih $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ili realnih funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definiranih na segmentu $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, za koje vrijedi

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx < \infty \ .$$

Takve funkcije nazivamo **kvadratno integrabilne**.

Teorem 3.1. *$L^2([a,b])$ je beskonačnodimenzionalni vektorski prostor.*

Teorem 3.2. *Preslikavanje*

$$\langle f, g \rangle = \mathscr{N} \int_a^b f(x)^* g(x) \, dx \tag{3.1}$$

je **skalarni produkt** *na prostoru $L^2([a,b])$. Ovdje je $\mathscr{N}$ neka konvencionalna konstanta.*

Norma funkcije $f(x)$ definirana je s $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$

U kontekstu klasičnog Fourierovog reda, nas će najviše zanimati prostor $L^2([-\pi,\pi])$ realnih funkcija sa skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, dx$$

S druge strane, u kvantnoj fizici koristimo produkt

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_a^b \psi(x)^* \phi(x)\, dx$$

definiran među kvadratno integrabilnim valnim funkcijama ψ i ϕ. Uobičajena je tzv. **bra-ket** notacija, $\langle \psi | \phi \rangle$.

Bazu prostora $L^2([a,b])$ označavamo s $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Vrijedi

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm} \ . \tag{3.2}$$

gdje je δ_{nm} **Kroneckerov simbol**

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1\,, & n = m \\ 0\,, & n \neq m \end{cases} \tag{3.3}$$

Tada neki općeniti vektor $u \in L^2[(a,b)]$ možemo razviti preko vektora baze

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, u \rangle\, e_n \ . \tag{3.4}$$

Primjer 3.1. Gram-Schmittovim postupkom ortonormirajte skup funkcija x^n za $n = 0, 1, 2$ na $L^2[-1, 1]$.

R. Označimo početne funkcije s $u_1 = 1$, $u_2 = x$, $u_3 = x^2$. Tada za prvi vektor e_1 možemo uzeti

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ .$$

Gram-Schmittov postupak nalaže da od drugog vektora, v_2 moramo oduzeti onu komponentu koja je kolinearna s e_1

$$e_2' = v_2 - \langle e_1, v_2 \rangle e_1 \ .$$

Imamo

$$\langle e_1, v_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x dx = 0 \ ,$$

pa je $e_2' = x$. Ovaj vektor još valja normirati

$$\langle e_2', e_2' \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \ ,$$

pa je

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} x \ .$$

Posljedni traženi vektor koji je ortogonalan na e_1 i e_2 dobijamo pomoću

$$e_3' = v_3 - \langle e_1, v_3 \rangle e_1 - \langle e_2, v_3 \rangle e_2 \ .$$

Imamo

$$\langle e_1, v_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{3} \ ,$$

odnosno

$$\langle e_2, v_3 \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \ .$$

Slijedi

$$e_3' = x^2 - \frac{1}{3} \ .$$

Uz normu $\langle e_3', e_3' \rangle = 8/45$ imamo

$$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1) \ .$$

Primjer 3.2. Gram-Schmittovim postupkom ortonormirajte skup funkcija $\{x^n\}$ za $n = 0, 1, 2$ ako je skalarni produkt definiran kao

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty e^{-x} f(x) g(x)\, dx \ .$$

R. Za prvi vektor imamo $\langle v_1, v_1 \rangle = 1$, pa je

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = 1 \ .$$

Drugi vektor dobivamo pomoću

$$e_2' = v_2 - \langle e_1, v_2 \rangle e_1 \ ,$$

gdje je

$$\langle e_1, v_2 \rangle = \int_0^\infty x e^{-x} dx = 1 \ ,$$

što vodi na $e_2' = x - 1$. Normalizacija vektora e_2' daje $\langle e_2', e_2' \rangle = 1$ odnosno

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = x - 1 \ .$$

Treći vektor dobivamo iz

$$e_3' = v_3 - \langle e_1, v_3 \rangle e_1 - \langle e_2, v_3 \rangle e_2 \ ,$$

gdje je

$$\langle e_1, v_3 \rangle = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2 \ ,$$

odnosno

$$\langle e_2, v_3 \rangle = \int_0^\infty x^2 (x - 1) e^{-x} dx = 4 \ .$$

Tada je $e_3' = x^2 - 4x + 2$. Uz normu $\langle e_3', e_3' \rangle$ konačni izraz za traženi vektor je

$$e_3' = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \ .$$

Napomenimo da su vektori dobiveni u prvom primjeru proporcionalni Legendreovim polinomima, koje ćemo upoznati u poglavlju 5, dok smo u drugom primjeru pronašli prva tri Laguerreova polinoma.

3.1 ♣ ZADACI

1. Gram-Schmittovim postupkom ortonormirajte skup funkcija $\{x^n\}$ za $n = 0, 1, 2$ ako je skalarni produkt definiran kao

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)g(x)\,dx\ .$$

2. Gram-Schmittovim postupkom ortonormirajte skup funkcija $\{x^n\}$ za $n = 0, 1, 2$ ako je skalarni produkt definiran kao

$$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{\infty} (1-x)^{1/2} f(x)g(x)\,dx\ .$$

§ 3.2 Fourierov red

Periodičnu funkciju na $f(x) = f(x + P)$ možemo razviti u **Fourierov red**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{P}\right)\right]\ , \tag{3.5}$$

gdje su **Fourierovi koeficijenti** a_n dani s

$$a_n = \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{P}\right)\,dx\,, \qquad b_n = \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{P}\right)\,dx\ , \tag{3.6}$$

za $n \in \mathbb{N}$. Specijalno, gornja formula za a_n vrijedi i u slučaju $n = 0$. Klasičan Fourierov red dan je s $P = 2\pi$. U širem kontekstu, Fourierov red (3.5) promatra se kao specijalan slučaj razvoja (3.4).

Preciznije, nužno je (ali ne i dovoljno) da funkcija $f(x)$ zadovoljava niz uvjeta, da bi njen Fourierov razvoj bio moguć.

Teorem 3.3. *Neka je f periodična, po dijelovima neprekidna funkcija, te* **derivabilna s lijeva i s desna** *u točki x. Tada Fourierov red funkcije f u točki x konvergira k vrijednosti*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}\ ,$$

gdje je $f(x \pm 0) = \lim_{\epsilon\to 0} f(x \pm \epsilon)$, za $\epsilon > 0$. Specijalno, ako je funkcija f, koja zadovoljava gore navedena svojstva, neprekidna u točki x, onda Fourierov red funkcije f u točki x konvergira k vrijednosti $f(x)$.

Primjer 3.3. Pokažite da vrijedi

$$\frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2}\sin\left(\frac{2n\pi x}{P}\right)\sin\left(\frac{2m\pi x}{P}\right)\,dx=\delta_{nm}\ ,$$

$$\frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2}\cos\left(\frac{2n\pi x}{P}\right)\cos\left(\frac{2m\pi x}{P}\right)\,dx=\delta_{nm}\ ,$$

$$\frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2}\sin\left(\frac{2n\pi x}{P}\right)\cos\left(\frac{2m\pi x}{P}\right)\,dx=0\ ,$$

R. Ograničiti ćemo se na pokazivanje samo prve od ovih tvrdnji, postupak za ostale je u potpunosti analogan. Napravimo prvo supstituciju $y=2\pi x/P$. Upotrebom trigonometrijske relacije

$$\sin(my)\sin(ny)=\frac{1}{2}\left[\cos((m-n)y)-\cos((m+n)y)\right]\ ,$$

imamo

$$\begin{aligned}I_{nm}=&\frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2}\sin\left(\frac{2n\pi x}{P}\right)\sin\left(\frac{2m\pi x}{P}\right)\,dx\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((m-n)y)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((m+n)y)\ .\end{aligned}$$

Za $n\neq m$ slijedi

$$I_{nm}=\frac{1}{2\pi(m-n)}\sin((m-n)y)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{2\pi(m+n)}\sin((m+n)y)\Big|_{-\pi}^{\pi}\ .$$

Gornji izrazi daju sinus s argumentom koji je višekratnik broja π čime svaki član iščezava, pa je $I_{nm}=0$ u tom slučaju. Za $n=m$ slijedi

$$I_{nm}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dy-\frac{1}{4\pi n}\sin(2ny)\Big|_{-\pi}^{\pi}\ .$$

Kako posljednji član iščezava iz istog razloga, ostaje $I_{nm}=1$.

Primjer 3.4. Razvijte funkciju $f(x)=x/2$ perioda 2π u Fourierov red.

R. Korištenjem formule (3.6), uz $P=2\pi$, imamo

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\,dx=\pi\ .$$

Nadalje

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\cos(nx)\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n}x\sin(nx)+\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{2\pi}=0\ ,$$

dok je

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\sin(nx)\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos(nx)+\frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{2\pi}=-\frac{1}{n}\ .$$

Slijedi

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(nx)\ .$$

Primjer 3.5. Razvijte funkciju $f(x) = \sin x$ u Fourierov red kosinusa s periodom π.

R. Imamo

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos(2nx)\, dx \ .$$

Ako napišemo

$$\sin x \cos(2nx) = \frac{1}{2}\left[\sin((2n+1)x) - \sin((2n-1)x)\right] \ ,$$

slijedi

$$a_n = \frac{1}{\pi}(-1)\left[\frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1} - \frac{\cos((2n-1)x)}{2n-1}\right]_0^\pi = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{4n^2-1} \ .$$

Za $n = 1$ imamo $a_n = 0$, pa je

$$f(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} \ .$$

Primjer 3.6. Pokažite da se Fourierov red periodične funkcije $f(x) = f(x+P)$ može zapisati u kompleksnom obliku

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-i2n\pi x/P} \ , \qquad A_n = \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(x) e^{i2n\pi x/P}\, dx \ . \tag{3.7}$$

R. Zapišimo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-2in\pi x/P} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} e^{i2n\pi x/P} \ .$$

Ako izdvojimo nulti član iz prve sume, te iskoristimo Eulerovu formulu, slijedi

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n + A_{-n})\cos\left(\frac{2n\pi x}{P}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} i(A_{-n} - A_n)\sin\left(\frac{2n\pi x}{P}\right) \ ,$$

iz čega slijedi identifikacija s (3.5) uz

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \qquad A_n + A_{-n} = a_n \ , \qquad i(A_{-n} - A_n) = b_n \ .$$

Invertiranjem posljednja dva izraza slijedi $A_n = (a_n + ib_n)/2$, te $A_{-n} = A_n^*$. Ako iskoristimo (3.6) slijedi

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{P}\left[\int_{-P/2}^{P/2} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{P}\right)\, dx + \int_{-P/2}^{P/2} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{P}\right)\, dx\right] \\ &= \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(x) e^{i2n\pi x/P}\, dx \ . \end{aligned}$$

Teorem 3.4. (Parsevalova jednakost) *Neka se funkcija $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ može razviti u Fourierov red (3.5). Tada vrijedi*

$$\frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} |f(x)|^2 \, dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 \ . \tag{3.8}$$

Fizikalna interpretacija Parsevalove jednakosti: ukupna energija jednaka je sumi energija pojedinih harmonika. Npr., ako je električni uređaj otpora R spojen na vanjski, vremenski periodičan napon $V(t)$ (osnovnog perioda T), tada je energija koja se troši u jednom periodu jednaka

$$E = \frac{1}{R} \int_0^T |V(t)|^2 \, dt$$

S druge strane, Parsevalova jednakost nam govori kako je ova energija jednaka zbroju energija svih pojedinih komponenti Fourierovog razvoja napona $V(t)$.

Parsevalova jednakost može biti korisna pri sumaciji nekih redova.

Primjer 3.7. Koristeći Parsevalovu jednakost za funkciju $f(x) = x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$, pokažite da vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

R. Imamo

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) \, dx = 0 \ .$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) \, dx == -\frac{x}{n\pi} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \, dx \ ,$$

gdje drugi korak slijedi iz parcijalne integracije. Drugi integral iščezava, pa je

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \ .$$

Iz Parsevalove jednakosti slijedi

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \ ,$$

pa je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

Primjer 3.8. Neka je $f(x) = x^2$, periodična s intervalom $[-1, 1]$. Pronađite Fourierov red dane funkcije te pokažite da vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \ .$$

Pomoću Parsevalove jednakosti, pokažite i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \ .$$

R. Imamo

$$a_0 = 2 \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3} \ ,$$

te

$$a_n = 2 \int_0^1 x^2 \cos(n\pi x) = \frac{4}{\pi^2 n^2} \, (-1)^n \ .$$

S obzirom da je funkcija parna, $b_n = 0$. Razvoj u Fourierov red je

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \, \cos(nx) \ .$$

Iz uvjeta $f(0) = 0$ slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \ .$$

Nadalje, koristeći Parsevalovu jednakost

$$\int_{-1}^{1} x^4 \, dx = \frac{2}{5} = \frac{2}{9} + \frac{16}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \ ,$$

odnosno

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \ .$$

3.2 ♣ ZADACI

1. Funkciju $f(x) = x$ razvijte u intervalu $[0, 1]$ u
   a) red sinusa,
   b) red kosinusa.
2. Razvijte funkciju $f(x) = x^2$, u Fourierov red za period 2π.
3. Pronađite Fourierov red za funkciju $f(x) = (x-1)(x+3)$, na intervalu $[1, 3]$ ako vrijedi $f(x) = f(x+2)$.
4. Žica je učvrćena na krajevima $0 < x < L$, te je podignuta na visinu y_0 u točci $x = L/4$. Prikažite oblik žice preko Fourierovog reda.
5. Razvijte funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x/L \ , & 0 \le x < L/2 \\ -x/L + 1/2 \ , & L/4 \le x < 3L/4 \\ x/L - 1 \ , & 3L/4 \le x < L \end{cases}$$

   u Fourierov red na intervalu $[0, L]$.

6. Razvijte
$$f(x) = \begin{cases} x\ , & 0 \le x < \pi \\ -x/L + 1/2\ , & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$
u Fourierov red s periodom $[-\pi, \pi]$. Pomoću danog reda pokažite da vrijedi
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\ .$$

7. Pronađite Fourierov red za funkciju $f(x) = e^{ax}$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ te ga iskoristite da pronađete razvoj funkcije $1/\mathrm{sh}\,(ax)$ te $\mathrm{ch}\,(ax)$.

8. Pokažite da je energija
$$E_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_k^2(x)\,dx\ ,$$
k-tog harmonika
$$u_k(x) = a_k \cos(kx) + \sin(kx)\ ,$$
dana s $E_k = a_k^2 + b_k^2$.

§ 3.3 Fourierov transformat

Fourierov red promatra periodične funkcije $f(x+P) = f(x)$. Ovdje nas zanima generalizacija na širu klasu funkcija koje više ne moraju biti periodične, odnosno da je period beskonačan. Analizu proširujemo na kvadratno integrabilne funkcije
$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ ;\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx < \infty \right\}\ .$$
Skalarni produkt između dviju funkcija f i g je dan s
$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f^*(x) g(x)\ . \tag{3.9}$$
S fizikalnog stajališta zanima nas harmonička analiza za beskonačne sisteme. U tu svrhu pogodno je krenuti od kompleksnog oblika Fourierovog reda (3.7),
$$f(x) = \frac{2}{P}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{-ik_n x}\,, \qquad F_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-P/2}^{P/2} f(x) e^{ik_n x}\,dx\ . \tag{3.10}$$
gdje smo zapisali koeficijente A_n prikladnije normirali, tj: $A_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{2F_n}{P}$. Ako pustimo $P \to \infty$, spektar $k_n = 2n\pi/P$ postaje kontinuiran, odnosno razmak između pojedinih modova postane infinitezimalan: $\Delta k = 2\pi\Delta n/P = 2\pi/P$. Tada
$$\lim_{P\to\infty} \frac{2}{P}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \to \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ ,$$

pa uz $F_n \to F(k)$, pišemo

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx}\, dk\,, \qquad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx}\, dx\,. \quad (3.11)$$

Funkciju $F(k)$ zovemo **Fourierovim transformatom** funkcije $f(x)$.

Teorem 3.5. (Plancherel) *Neka su $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ po dijelovima neprekidne funkcije, te F i G njihovi Fourierovi transformati. Tada vrijedi*

$$\langle F, G\rangle = \langle f, g\rangle\,. \quad (3.12)$$

Specijalno, za $f = g$ vrijedi

$$\langle F, F\rangle = \langle f, f\rangle\,. \quad (3.13)$$

Posljednji izraz razumijemo kao svojevrstan analogon Parsevalove jednakosti za slučaj Fourierovog transformata.

Alternativno, ponekad se koristi i trigonometrijski oblik Fourierovog transformata

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left[A(k)\cos(kx) + B(k)\sin(kx)\right]\,, \quad (3.14)$$

gdje su

$$A(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(kx)\, dx\,, \qquad B(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(kx)\, dx\,. \quad (3.15)$$

Primjer 3.9. Pronađite Fourierov transformat funkcije

$$f(t) = \begin{cases} 1\,, & -T < t < T \\ 0\,, & t > T,\, t < -T \end{cases}$$

R.

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} e^{i\omega t}\, dt = \frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t}\Big|_{-T}^{T} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\omega T)}{\omega}\,.$$

Nultočke ove funkcije $\omega_n = n\pi/T$, $n \in \mathbb{Z}$ se za $T \to \infty$ skupljaju prema ishodištu, tj. širenje funkcije $f(t)$ uzrokuje sužavanje njenog transformata $F(\omega)$.

Gornji primjer ilustrira situaciju pri pokušaju detekcije npr. tona određene frekvencije. Ako ga prikažemo funkcijom $f(t) = Ae^{i\omega_0 t}$ u periodu $-T < t < T$, tada Fourierov transformat poprima oblik identičan onom gore, samo što je sad koncentriran oko $\omega = \omega_0$, a ne oko $\omega = 0$

$$F(\omega) = A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin[(\omega - \omega_0)T]}{\omega - \omega_0}\,.$$

Mjerni instrument (npr. ljudsko uho) detektira snagu razloženu po spektru koja je proporcionalna kvadratu amplitude $F^2(\omega)$. Maksimum tog spektra, tj. frekvencija ω_0 tim će se bolje razlučiti što više traje signal.

Ispada da je dano svojstvo Fourierove analize sasvim općenito: što je funkcija šira to je njen Fourierov transformat uži. Heuristički se to može argumentirati na slijedeći način. Neka je Fourierov transformat $F(\omega)$, funkcije $f(t)$, značajan samo u nekom konačnom intervalu $\Delta\omega = \omega_{\max} - \omega_{\min}$. Njen oblik u t_0 definiran je s

$$f(t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t_0}\, d\omega \ .$$

U nekom kasnijem trenutku $t = t_0 + \Delta t$ imamo

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t_0} e^{-i\omega \Delta t}\, d\omega \ .$$

Razmišljajući u kontekstu vektorskog prostora, i baze definirane s vektorima $e^{-i\omega t}$ pitamo se nakon kojeg trenutka će vektori $e^{-i\omega t_0}$ koji definiraju bazu u nekom $\Delta\omega$ biti znantno izmjenjeni, odnosno koji je to Δt nakon kojeg funkcija $f(t)$ se značajno razlikuje od njene vrijednosti u početnom trenutku, $f(t_0)$? To je trenutak u kojem je razlika u fazi početnog i konačnog vektora u spektru $e^{-i\omega_{\min}\Delta t}$, odnosno $e^{-i\omega_{\max}\Delta t}$ reda veličine jedinične faze, tj.

$$\Delta\omega \Delta t \sim 1 \ .$$

U kvantnoj mehanici gornji izraz je jedan primjer **Heisenbergove relacije neodređenosti**. Važno je primjetiti da je njegov korijen jednostavna posljedica Fourierove analize.

Primjer 3.10. Pokažite da je $e^{-x^2/2}$ sama sebi Fourierov transformat.

R. Kako je $f(x) = e^{-x^2/2}$ parna funkcija, imamo

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2/2} \cos(kx)\, dx \ ,$$

gdje smo ovaj integral već izračunali u (**??**). Slijedi

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-k^2/2} = e^{-k^2/2} \ . \tag{3.16}$$

Primjer 3.11. Fourier transformirajte funkciju $f(t) = Ae^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$, $A > 0$, te pokažite da inverznim Fourierovim transformatom dobivate nazad početnu funkciju.

R. Kako je $f(t)$ parna funkcija, imamo

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t)\, dt \ .$$

Uz korištenje tabličnog integrala

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\cos(bx)+b\sin(bx)\right] \ ,$$

imamo

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{A\alpha}{\omega^2+\alpha^2} \ .$$

Za pronaći nazad originalnu funkciju, treba napraviti inverz Fourierovog transformata, tj.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega = \frac{A\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2+\alpha^2}\,d\omega \ .$$

Integral rješavamo standardnom tehnikom integracije u kompleksnoj ravnini

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{-izt}}{z^2+\alpha^2} \ ,$$

gdje podintegralna funkcija ima polove u $z = \pm i\alpha$, a dio krivulje $\mathcal{C}$ čini realna os. Za $t < 0$ krivulju valja zatvoriti na poluravnini $\mathrm{Im}(z) > 0$, čime

$$I = 2\pi i \mathrm{Res}(i\alpha) = \frac{\pi}{\alpha}e^{\alpha t} \ .$$

Za $t > 0$ zatvaramo krivulju na $\mathrm{Im}(z) < 0$, iz čega slijedi

$$I = 2\pi i \mathrm{Res}(-i\alpha) = \frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha t} \ .$$

Slijedi

$$f(t) = \frac{A\alpha}{\pi}\frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha|t|} = Ae^{-\alpha|t|} \ .$$

I u ovom primjeru zgodno je primjetiti da je Fourierov transformat širi što je originalna funkcija uža i obratno. Npr. običaj je širinu definirati na pola maksimuma dane krivulje. Tada je lako pronaći da su širine $\Delta_{f,F}$, funkcije i njenog Fourierovog transformata, dane s

$$\Delta_f = \frac{\ln 4}{\alpha} \,, \qquad \Delta_F = 2\alpha \ ,$$

odnosno da je $\Delta_f\Delta_F = 3\ln 2 \simeq 2.08$.

3.3 ♣ ZADACI

1. Koristeći definiciju Fourierovog transformata pokažite da

   a) ako je $f(x)$ s periodom a, onda je $F(k) = 0$ osim ako je $ka = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

   b) Fourierov transformat od $xf(x)$ je $\frac{1}{i}\frac{dF(k)}{dk}$

   c) Fourierov transformat od $f(px+\phi)$ je

   $$\frac{e^{ik\phi/p}}{p}F\left(\frac{k}{p}\right) \ ,$$

   gdje su $p, \phi > 0$ neke konstane.

2. Pronađite Fourierov transformat funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2\,, & |x| < 1 \\ 0\,, & |x| > 1 \end{cases}$$

3. Pronađite Fourierov transformat slijedećih funkcija

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}\,,$, b) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + a^2)^2}\,,$, c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + a^2}$,

gdje je $a > 0$.

4. Pronađite Fourierov transformat funkcije $f(t) = te^{-a|t|}$, za $a > 0$.

5. Pronađite Fourierov transformat gušenih oscilacija

$$f(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0 \\ e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\,, & t \geq 0 \end{cases}$$

te pokažite da je zadovoljena Plancherelova jednakost!

6. Napravite Fourierov transformat jednadžbe

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - K^2\phi(x) = f(x)\ ,$$

te pokažite da se partikularno rješenje može napisati u obliku

$$\phi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}F(k)}{k^2 + K^2}\,dk\ ,$$

gdje je $F(k)$ Fourierov transformat funkcije $f(x)$.

§ 3.4 Delta funkcija

Postavimo slijedeće pitanje: kako karakterizirati pobudu sustava, npr. vanjskom silom koja djeluje trenutno? Ako funkciju koja karakterizira pobudu označimo s $\delta(x)$, tada ako pobuda djeluje isključivo u $x = y$, moramo zahtijevati

$$\delta(x) = \begin{cases} 0\,, & x \neq 0 \\ \infty\,, & x = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

S druge strane, kako $\delta(x)$ predstavlja trenutni "impuls", zahtijevamo da je ukupna pobuda konačna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1\ , \tag{3.18}$$

gdje je $\delta(x)$ prikladno normirana. Posljednja jednadžba služi kao definicija **delta funkcije**.

Napomenimo da izraz (3.18), striktno govoreći, nije ispravan unutar do sad izloženog matematičkog okvira, jer naivno bi zaključili da je integral δ-funkcije nula. Naime, ako funkcija promijeni vrijednost na skupu mjere nula, tj. u konačno mnogo točaka vrijednost integrala se ne smije promijeniti. Ispravna definicija δ-funkcije zahtijeva poznavanje teorije distribucija gdje δ-funkcija predstavlja funkcional s vektorskog prostora funkcija na polje realnih brojeva. Time δ-funkcija nema sama za sebe smisao, već jedino pod integralom.

Važna posljedica (3.18) je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\, dx = f(a)\ . \tag{3.19}$$

Napomenimo da ovaj izraz vrijedi i za bilo koji konačni interval $u < x < v$ koji obuhvaća točku a

$$\int_{u}^{v} \delta(x-a) f(x)\, dx = f(a)\ . \tag{3.20}$$

Reprezentacije

δ-funkciju najlakše je predočiti kao limes funkcije $\delta_a(x)$ koja je gotovo nula svugdje izvan intervala kojeg možemo kontrolirati parametrom a. Unutar tog intervala funkcija divergira kako $a \to 0$. U tom smislu, δ-funkcija može se prikazati kao limes $\delta(x) = \lim_{a\to 0} \delta_a(x)$, gdje limes valja shvatiti u smislu (3.19), tj.

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) f(x)\, dx = f(0)\ .$$

Primjeri reprezentacija:

a)
$$\delta_a(x) = \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{a}\right)\ ,$$

b)
$$\delta_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}\ ,$$

c)
$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2}\ ,$$

d)
$$\delta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}\,, & |x| \le 0 \\ 0\,, & |x| > a \end{cases}\ .$$

Primjer 3.12. Pokažite da vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x-y)} = 2\pi\delta(x-y)\ . \tag{3.21}$$

R. Krenimo od definicije Fourierovog integrala (3.11). Ako izraz za Fourierov transformat iz druge jednadžbe, stavimo u prvu jednadžbu, imamo

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-iky} f(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y) \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x-y)} \ ,$$

gdje smo zamijenili poredak integracije u drugom koraku. Vidimo da početnu funkciju možemo dobiti u slučaju da vrijedi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x-y)} = \delta(x-y) \ .$$

Formula (3.21) ilustrira činjenicu da ako funkcije $e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ shvatimo kao generaliziranu, kontinuiranu verziju vektora baze za razvoj funkcije u Fourierov integral, tada δ-funkciju možemo motivirati kroz generalizaciju skalarnog produkta tih vektora, tj. svojevrsnu kontinuiranu verziju Kroneckerovog simbola. Međutim, iz (3.21) također prepoznajemo da, za razliku od svojih diskretnih varijanti, same funkcije $e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ nisu dio prostora $L^2(\mathbb{R})$, pa se prethodna izjava valja shvatiti slikovito. Naravno to ne znači da sam Fourierov integral ne pripada tom skupu.

Primjer 3.13. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija i $a < 0 < b$. Pokažite da tada vrijedi **Sokhotski-Plemelj identitet**

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^b \frac{f(x)}{x \pm i\epsilon}\, dx = \mp i\pi f(0) + \mathcal{P}\int_a^b \frac{f(x)}{x}\, dx \ , \tag{3.22}$$

gdje $\mathcal{P}$ označava Cauchyjevu glavnu vrijednost.

R. Pišemo

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \frac{x \mp i\epsilon}{x^2+\epsilon^2} \ ,$$

pa je

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^b \frac{f(x)}{x \pm i\epsilon}\, dx = \mp i\pi \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^b \frac{\epsilon}{\pi(x^2+\epsilon^2)} f(x)\, dx + \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^b \frac{x^2}{x^2+\epsilon^2}\frac{f(x)}{x}\, dx \ .$$

Drugi član u gornjem izrazu, za $x \neq 0$ je

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{x^2}{x^2+\epsilon^2} = 1 \ ,$$

čime dobivamo definiciju glavne vrijednosti, odnosno

$$\mathcal{P}\int_a^b \frac{f(x)}{x}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\int_a^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x}\, dx + \int_\epsilon^b \frac{f(x)}{x}\, dx\right] \ .$$

S druge strane, prvi član u limesu $\epsilon \to 0$ predstavlja upravo moguću reprezentaciju δ-funkcije. Time smo pokazali navedenu tvrdnju.

Ova relacija je u literaturi često zapisana bez integrala u obliku

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x} \ . \tag{3.23}$$

gdje $\mathcal{P}$ označava glavnu vrijednost funkcije, zahtijevajući da $1/x$ izvrijednjujemo svugdje osim u nuli.

Svojstva

Slijede nekoliko temeljnih svojstava Diracove δ-funkcije:

a) Za $a \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \ . \tag{3.24}$$

b) Ako $f(x)$ ima n realnih nultočki x_i, tada je
$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \ . \tag{3.25}$$

c) Vrijedi
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x-a)\,dx = -f'(a) \ ,$$
te općenito
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x-a)\,dx = (-1)^n f^{(n)}(a) \ .$$

d) Veza s θ-funkcijom i $|x|$
$$\frac{d\theta}{dx} = \delta(x) \ , \tag{3.26}$$
$$\frac{1}{2}\frac{d^2|x|}{dx^2} = \delta(x) \ . \tag{3.27}$$

e)
$$\frac{d}{dx}[\delta(f(x))] = f'(x)\delta'(f(x)) \ .$$

Primjetimo da svojstvo (3.24) nalaže da vrijedi
$$\int_0^u \delta(x)dx = \frac{1}{2} \ . \tag{3.28}$$
gdje je $u \in \langle 0, \infty \rangle$.

Primjer 3.14. Dokažite svojstvo (3.25).

R. Promotrimo prvo slučaj monotone funkcije $f(x)$ s jednom nul-točkom x_0 na nekom konačnom intervalu $a < x < b$. Tada za proizvoljnu $g(x)$ imamo
$$\int_a^b g(x)\delta(f(x))\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\delta(f(x))\,\frac{1}{\frac{df}{dx}}\,df \ .$$

Primjetimo da pri promjeni varijabli integracije $x \to f(x)$ argument funkcije $g(x)$ valja shvatiti tako da invertiramo relaciju $f(x) = f$. Slijedi da se podintegralna funkcija izvrijednjuje u onoj točci u kojoj je argument δ-funkcije nula, tj.

$$\int_a^b g(x)\delta(f(x))\,dx = \operatorname{sgn}\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{g(x_0)}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{g(x_0)}{\left|\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}\right|}\ ,$$

gdje smo pri izvrijednjavanju integrala uzeli u obzir da kada je funkcija padajuća, tj. kada je $df/dx < 0$, zbog definicije δ-funkcije (3.20) valja obrnuti granice integracije. Ako imamo funkciju s n-nultočaka, izraz (3.25) dobijemo dijeljenjem funkcije na intervale u kojima je sadržana samo jedna nultočka, odnosno na intervale u kojima je funkcija monotona.

Primjer 3.15. Pronađite Fourierov transformat funkcije $\delta(x^2 - a^2)$.

R. Koristeći svojstvo (3.25), imamo

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}[\delta(x-a) + \delta(x+a)]\ .$$

Tada

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x^2-a^2)e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2|a|}(e^{ika}+e^{-ika}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\cos(ka)}{|a|}\ .$$

Primjer 3.16. Pokažite da je

$$\frac{d}{dx}\theta(x^2-1) = 2x\delta(x^2-1)\ .$$

R. Relaciju dokazujemo integriranjem lijeve i desne strane pomnožene s nekom test funkcijom $f(x)$ za koju ćemo pretpostaviti da iščezava na rubovima. Tada

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\theta(x^2-1)}{dx}f(x)\,dx =& f(x)\theta(x^2-1)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\theta(x^2-1)f'(x)\,dx = \\ &- \int_{-\infty}^{-1}f'(x)\,dx - \int_1^{\infty}f'(x)\,dx = -f(-1)+f(1)\ .\end{aligned}$$

U prvom koraku smo koristili parcijalnu integraciju, a u drugom da je argument θ-funkcije $x^2 - 1 < 0$ na intervalu $-1 < x < 1$. Integracija desne strane daje

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)2x\delta(x^2-1)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}f(x)[\delta(x-1)-\delta(x+1)]\,dx = f(1)-f(-1)\ .$$

Delta funkcija u više dimenzija

Neka su $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ proizvoljni vektori u n-dimenzija, u općenitom koordinatnom sustavu. Delta funkciju u n-dimenzija definiramo u potpunoj analogiji s (3.19), tj.

$$\int f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dV = f(\mathbf{r}') \ . \tag{3.29}$$

Kao napomena dimenzionalnosti, ponekad se koristi i oznaka $\delta^n(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. U Kartezijevim koordinatama volumni element dV je jednostavno

$$dV = \prod_{i=1}^{n} dx_i \ ,$$

te δ-funkcija ima slijedeći oblik

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \prod_{i=1}^{n} \delta(x_i - x_i') \ .$$

S druge strane, u općenitim koordinatama, označimo ih s u_i, volumni element je

$$dV = J \prod_{i=1}^{n} du_i \ ,$$

gdje je J **Jacobijan** transformacije između Kartezijevih i općenitih koordinata

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \ . \tag{3.30}$$

U tom slučaju, δ-funkcija u općenitim koordinatama mora biti definirana kao

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{\prod_{i=1}^{n} \delta(u_i - u_i')}{J} \ ,$$

da bi relacija (3.29) bila zadovoljena. Sam Jacobijan je formalno izvrijednjen u točci $\mathbf{r}'$, no njegovo izvrijednjavanje je često zgodno odgoditi, s obzirom na to da ionako δ-funkcija garantira da će tako ispasti pri izvrijednjavanju integrala.

Specijalni slučajevi u 3 dimenzije:

a) Kartezijev koordinatni sustav

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \ . \tag{3.31}$$

b) Cilindrični koordinatni sustav

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{\delta(r-r')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z')}{r} \ . \tag{3.32}$$

c) Sferni koordinatni sustav

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')}{r^2 \sin\theta} \ . \tag{3.33}$$

Singularne točke Jacobijana, tj. one u kojima je $J = 0$ zahtijevaju posebnu pažnju. Singularne točke obično povlače da neke od preostalih koordinata nisu u njima dobro definirane. U tom slučaju potrebno je Jacobijan integrirati po tim koordinatama, te ih isključiti iz produkta delta funkcija. (Pitanje: da li se može desiti da imamo singularnu točku a da su sve koordinate dobro definirane?) Na taj način opet ćemo zadovoljiti (3.29).

Npr. u cilindričnom sustavu, na z-osi, vrijedi $r = 0$, dok kut ϕ nije definiran. Tada duž z-osi δ-funkciju pišemo kao

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\delta(r)\delta(z - z')}{2\pi r} \ . \tag{3.34}$$

U sfernim koordinatama duž z-osi, Jacobijan je singularan u koordinati θ, dok je ϕ neodređen. Tada

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\delta(r - r')\delta(\theta - \theta')}{2\pi r^2 \sin\theta} \ .$$

Specijalno u ishodištu su i θ i ϕ neodređeni, pa imamo

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \ .$$

Kako je δ-funkcija definirana tako da je jednakost (3.29) uvijek zadovoljena, to npr. znači da za integral (3.34) imamo

$$\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')dV = \int_0^\infty \delta(r)dr = 1 \ . \tag{3.35}$$

Isti rezultat vrijedi i za koordinatu r u sfernom sustavu. Analogno, uvjet (3.29) također vodi na

$$\int_0^{2\pi} \delta(\phi)d\phi = \int_0^{2\pi} \delta(\phi - 2\pi)d\phi = 1 \ , \tag{3.36}$$

$$\int_0^{\pi} \delta(\theta)d\theta = \int_0^{\pi} \delta(\theta - \pi)d\theta = 1 \ , \tag{3.37}$$

za kut ϕ u cilindričnom i sfernom sustavu, odnosno za kut θ u sfernom sustavu. Primjetimo da je ova konvencija za integraciju δ-funkcije s argumentom koji iščezava na rubnim točkama intervala različita od one u (3.28).

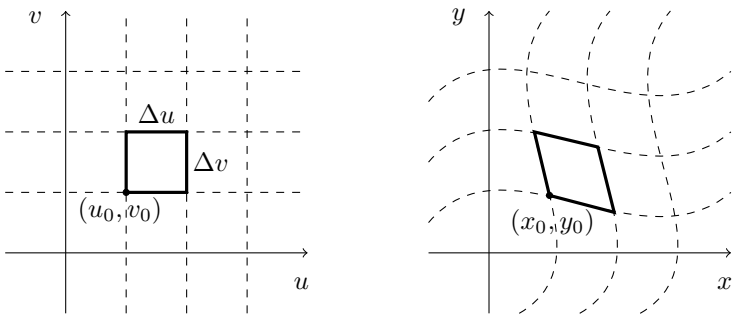
Primjer 3.17. Neka je dan element površine (volumni element u dvije dimenzije) u Kartezijevim koordinatama $dS = dxdy$. Pronađite kako on izgleda u nekim općenitim koordinatama (u, v).

R. Općeniti vektor u Kartezijevim koordinatama dan je s

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{e}_x + y(u, v)\mathbf{e}_y \ ,$$

gdje smo uzeli u obzir da postoji transformacija između Kartezijevih (x, y) i općenitih koordinata (u, v), a $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

Infinitezimalna pravokutna površina $\Delta S = \Delta u \Delta v$ u sustavu (u, v) poprima neku općenitu formu u Kartezijevom sustavu, vidi Sliku 3.1. Ako je površina infinitezimalna,



Slika 3.1: Slika prikazuje krivulje $u = \text{const.}$, te $v = \text{const.}$ u općenitim (u, v) koordinatama (lijevo), te u (x, y) koordinatama (desno). Specijalno, točka (u_0, v_0) preslikava se u (x_0, y_0) gdje je $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$.

aproksimirat ćemo je paralelogramom. Krenimo od točke $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ na Slici 3.1. Tada je

$$\mathbf{r}(u_0, v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) = \mathbf{r}_v \, \Delta v \ ,$$

gdje smo se zadržali na prvom netrivijalnom članu u Taylorovom razvoju, odnosno

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{e}_y \ .$$

Analogno

$$\mathbf{r}(u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) = \mathbf{r}_u \, \Delta u \ ,$$

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{e}_y \ .$$

Površina ΔS infinitezimalnog paralelograma dana je s

$$\Delta S = |(\mathbf{r}_u \, \Delta u) \times (\mathbf{r}_v \, \Delta v)| = J \, \Delta u \Delta v \ ,$$

gdje smo u definiciji vektorskog produkta

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{e}_z = J\mathbf{e}_z \ ,$$

prepoznali Jacobijan.

Prikaz gustoće prostorne raspodjele

δ-funkcija je od koristi pri zapisu gustoće npr. materije ili naboja u prostoru, što je na dalje od iznimne važnosti pri rješavanju nehomogenih običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Npr. gustoća točkaste čestice mase M u ishodištu je u Kartezijevom, cilindričnom i sfernom sustavu dana redom s:

$$\rho(\mathbf{r}) = M\delta(x)\delta(y)\delta(z) \, , \qquad \rho(\mathbf{r}) = \frac{M}{2\pi r}\delta(r)\delta(z) \, , \qquad \rho(\mathbf{r}) = \frac{M}{4\pi r^2}\delta(r) \ .$$

Primjer 3.18. Pronađite prikaz gustoće prostorne raspodjele materije mase M za homogeni prsten polumjera a u xy ravnini u cilindričnom i sfernom koordinatnom sustavu.

R. Krenimo od gustoće $d\rho(\mathbf{r})$ infinitezimalnog djelića prstena mase dm dane s

$$d\rho(\mathbf{r}) = dm\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \ ,$$

gdje $\mathbf{r}'$ označava koordinate na prstenu, a $\mathbf{r}$ koordinate u nekoj proizvoljnoj točci. Zadatak je integrirati ovaj izraz, po koordinatama $\mathbf{r}'$ čime na kraju dobivamo traženu gustoću.

Koristeći (3.32), u cilindričnom koordinatnom sustavu imamo

$$d\rho(\mathbf{r}) = \frac{dm}{a}\delta(r-a)\delta(\phi-\phi')\delta(z) \ .$$

Zbog homogenosti imamo

$$\frac{dm}{ad\phi'} = \frac{M}{2\pi a} \ , \tag{3.38}$$

odnosno $dm = \frac{M}{2\pi}d\phi'$. Gustoća je tada dana s

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{M}{2\pi a}\delta(r-a)\delta(z)\int_0^{2\pi}\delta(\phi-\phi')\,d\phi' = \frac{M}{2\pi a}\delta(r-a)\delta(z) \ . \tag{3.39}$$

U sfernom sustavu koristimo (3.33) da dobijemo

$$d\rho(\mathbf{r}) = \frac{dm}{a^2}\delta(r-a)\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\delta(\phi-\phi') \ .$$

Za dm koristimo (3.38), pa imamo

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{M}{2\pi a^2}\delta(r-a)\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\int_0^{2\pi}\delta(\phi-\phi')\,d\phi' = \frac{M}{2\pi a^2}\delta(r-a)\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) \ .$$

Primjer 3.19. Pronađite raspodjelu gustoće materije za homogeni štap na duljini AB između točaka $A(0,0,a)$ i $B(0,0,-a)$ u Kartezijevom, cilindričnom i sfernom koordinatnom sustavu.

R. U Kartezijevom sustavu imamo

$$d\rho(\mathbf{r}) = dm\delta(x)\delta(y)\delta(z-z')\theta(a-|z|) \ ,$$

gdje θ-funkcija prikladno ograničava područje od značaja na $|z| < a$. Homogenost nalaže $dm/dz' = M/2a$, pa imamo

$$\rho = \frac{M}{2a}\delta(x)\delta(y)\theta(a-|z|)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z-z')dz' = \frac{M}{2a}\delta(x)\delta(y)\theta(a-|z|) \ .$$

U cilindričnom sustavu, kut ϕ je neodređen duž z-osi, pa imamo

$$d\rho(\mathbf{r}) = \frac{dm}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z')\theta(a-|z|) \ .$$

Uz već poznati uvjet homogenosti, slijedi

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{M}{2a}\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\theta(a-|z|)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z-z')dz' = \frac{M}{4\pi ar}\delta(r)\theta(a-|z|) \ .$$

Za napisati $\rho(\mathbf{r})$ u sfernim koordinatama

$$d\rho(\mathbf{r}) = \frac{dm}{2\pi r^2 \sin\theta}\delta(r-r')\left[\delta(\theta)+\delta(\theta-\pi)\right]\theta(a-r)\ ,$$

rastavili smo izraz na dva dijela. Za prvi dio od ishodišta do točke A imamo $\theta = 0$, a drugi dio od B do ishodišta imamo $\theta = \pi$. Naglasimo još da je Jacobijan integriran po neodređenoj koordinati ϕ. Uz uvjet homogenosti $dm/dr' = M/2a$, slijedi

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}) &= \frac{M}{2a}\frac{1}{2\pi r^2\sin\theta}\left[\delta(\theta)+\delta(\theta-\pi)\right]\theta(a-r)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(r-r')dr' \\ &= \frac{M}{2a}\frac{1}{2\pi r^2\sin\theta}\left[\delta(\theta)+\delta(\theta-\pi)\right]\theta(a-r)\ .\end{aligned}$$

Primjer 3.20. Prikažite gustoću prostorne raspodjele sferne ljuske polumjera a i mase M u sfernom sustavu.

R. U sfernom sustavu imamo

$$d\rho(\mathbf{r}) = \frac{dm}{a^2\sin\theta}\delta(r-a)\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')\ .$$

Homogenost raspoređene mase nalaže

$$\frac{dm}{a^2\sin\theta' d\theta' d\phi'} = \frac{M}{4\pi a^2}\ .$$

Tada

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{M}{4\pi a^2\sin\theta}\delta(r-a)\int_0^{2\pi}\delta(\phi-\phi')d\phi'\int_0^{\pi}\sin\theta'\delta(\theta-\theta')d\theta' = \frac{M}{4\pi a^2}\delta(r-a)\ .$$

Primjer 3.21. U cilindričnom koordinatnom sustavu, pronađite raspodjelu gustoće materije šupljeg valjka mase M, visine h, polumjera a kojem je os simetrije z-os, centriranog u ishodištu.

R. Rastaviti ćemo problem na dva dijela: računanje raspodjele za diskove $\rho_A(\mathbf{r})$, te za oplošje $\rho_B(\mathbf{r})$. Za disk u $z = h/2$, te u $z = -h/2$, imamo

$$d\rho_A = \frac{dm}{r}\delta(r-r')\delta(\phi-\phi')\left[\delta\left(z-\frac{h}{2}\right)+\delta\left(z+\frac{h}{2}\right)\right]\theta(a-r)\ .$$

Materija na disku je homogeno raspodijeljena

$$\frac{dm}{r'dr'd\phi'} = \frac{M_A}{2a^2\pi}\ ,$$

gdje je $M_A/2$ masa jednog diska. Slijedi

$$\rho_A(\mathbf{r}) = \frac{M_A}{2a^2\pi}\left[\delta\left(z-\frac{h}{2}\right)+\delta\left(z+\frac{h}{2}\right)\right]\theta(a-r)\ .$$

Za oplošje imamo

$$d\rho_B(\mathbf{r}) = \frac{dm}{r}\delta(z-z')\theta\left(\frac{h}{2}-|z|\right)\delta(r-a)\delta(\phi-\phi') \ .$$

Zbog homogenosti oplošja

$$\frac{dm}{ad\phi' dz'} = \frac{M_B}{2\pi a h} \ ,$$

pa je

$$\rho_B(\mathbf{r}) = \frac{M_B}{2\pi a h}\theta\left(\frac{h}{2}-|z|\right)\delta(r-a) \ .$$

Valja još odrediti M_A i M_B preko ukupne mase $M = M_A + M_B$. U tu svrhu koristimo činjenicu da i disk i oplošje imaju jednaku gustoću. Tada

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{2\pi a^2}{2\pi a h} = \frac{a}{h} \ .$$

Lako je stoga pronaći da

$$M_A = \frac{aM}{a+h} \, , \qquad M_B = \frac{hM}{a+h} \ ,$$

pa je ukupna gustoća raspodjele $\rho(\mathbf{r}) = \rho_A(\mathbf{r}) + \rho_B(\mathbf{r})$

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{M}{2\pi a(a+h)}\left\{\left[\delta\left(z-\frac{h}{2}\right)+\delta\left(z+\frac{h}{2}\right)\right]\theta(a-r)+\theta\left(\frac{h}{2}-|z|\right)\delta(\rho-a)\right\} \ .$$

Primjer 3.22. Raspodjela materije dana je u sfernim koordinatama izrazom

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{a^2}{r^2}\delta\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{3r}{a}\right)\delta(2\sin^2\theta-\cos\theta-1)\delta(\phi-\pi) \ ,$$

gdje je $a > 0$ konstanta. Pronađite ukupnu masu ovog objekta!

R. Integriranjem raspodjele dobivamo ukupnu masu

$$\begin{aligned} M &= \int d^3r\,\rho(\mathbf{r}) \\ &= \int_0^\infty r^2\,dr\,\frac{a^2}{r^2}\,\delta\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{3r}{a}\right)\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\,\delta(2\sin^2\theta-\cos\theta-1)\int_0^{2\pi} d\phi\,\delta(\phi-\pi) \ , \end{aligned}$$

gdje smo integral zapisali u sfernim koordinatama. Izračunajmo prvo integral po radijalnoj koordinati. Koristimo formulu (3.25) da napišemo pripadnu δ-funkciju pomoću nultočki integranda

$$\delta\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{3r}{a}\right) = \frac{a}{3}\left[\delta(r-3a)+\delta(r)\right] \ .$$

Tada je

$$\int_0^\infty dr\,\delta\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{3r}{a}\right) = \frac{a}{3}\int_0^\infty dr\,\delta(r-3a)+\frac{a}{3}\int_0^\infty dr\,\delta(r) = \frac{a}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{2a}{3} \ ,$$

gdje smo uzeli u obzir da je integral $\int_0^\infty dr\delta(r) = 1$, vidi xx. Za račun integrala po kutu θ zgodno je uvesti pokratu $x = \cos\theta$. Tada raspis δ-funkcije po nultočkama daje

$$\delta(2\sin^2\theta - \cos\theta - 1) = \delta(-2x^2 - x + 1) = \frac{1}{3}\delta(x+1) + \frac{1}{3}\delta\left(x - \frac{1}{2}\right) \ .$$

Imamo

$$\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, \delta(2\sin^2\theta - \cos\theta - 1) = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 dx\, \delta(x+1) + \frac{1}{3}\int_{-1}^1 dx\, \delta\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \ .$$

Konačno, integral po ϕ je trivijalan

$$\int_0^{2\pi} d\phi\, \delta(\phi - \pi) = 1 \ ,$$

pa je ukupno rješenje $M = 4a^3/9$.

3.4 ♣ ZADACI

1. Pokažite da vrijedi

$$\delta(x-y) = \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi n}{L}(x-y)} \ .$$

2. Pokažite da vrijedi

   a)
$$\frac{d}{dx}\left[\delta(x^2-1)\right] = \frac{1}{2}[\delta'(x-1) + \delta'(x+1)] \ ,$$

   b)
$$\delta'(x^2-1) = \frac{1}{4}[\delta'(x-1) - \delta'(x+1) + \delta(x-1) + \delta(x+1)] \ .$$

3. Kako izgleda raspodjela gustoće materije za homogeni disk polumjera a položenog u xy ravninu sa središtem u ishodištu?

4. Pronađite raspodjelu gustoće materije za kombinaciju prstena, polumjera a, i štapa duljine $2b$ ukupne mase M, i jednakih linearnih gustoća. Štap je položen na z-osi, simetrično oko ishodišta, dok se prsten nalazi u xy ravnini.

5. Pronađite raspodjelu gustoće materije tijela sastavljenog od diska polumjera a koji leži u xy ravnini sa središtem u ishodištu, te polusfere polumjera a sa središtem u ishodištu koja je smještena u prostor $z > 0$.

6. Raspodjela materije dana je u sfernim koordinatama izrazom

   a)
$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2}\delta\left(r^3 - ar^2 + \frac{6}{25}a^2 r\right)\delta(\cos^2\theta - 1)\delta\left(\phi - \frac{3\pi}{4}\right) \ ,$$

b)

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2}\delta(r^3 - 7ar^2 + 12a^2r)\delta\left(-\sin^2\theta - \frac{1}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\right)\delta(\phi) \ ,$$

gdje je $a > 0$ konstanta. Izračunajte ukupnu masu ovog objekta!

7. Raspodjela materije dana je u cilindričnim koordinatama izrazom

a)

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}\delta\left(r^3 - ar^2 + \frac{2}{9}a^2r\right)\delta(\mathrm{ctg}\phi + 1)\delta(z - a) \ ,$$

b)

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}\delta\left(r^3 - 3r^2 + 2r\right)\delta(1 - \mathrm{tg}\phi)\delta\left(\frac{z^2 - a^2}{z^2 + a^2}\right) \ ,$$

gdje je $a > 0$ konstanta. Izračunajte ukupnu masu ovog objekta!

8. Zapišite gustoću materije $\rho(\mathbf{r})$ (u sfernim koordinatama) objekta ukupne mase M koja je homogeno raspoređena na dva prstena polumjera a (sa središtem u ishodištu) položena u xy i yz ravninu.

§ 3.5 Greenova funkcija za obične diferencijalne jednadžbe

Metoda **Greenove funkcije** predstavlja jedan mogući način rješavanja nehomogenih diferencijalnih jednadžbi. Jednom kada se riješi diferencijalna jednadžba za jedinični odziv, predstavljen δ-funkcijom, u mogućnosti smo dobiti partikularno rješenje za proizvoljan odziv. Metoda se obilato koristi kod rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. U ovom odjeljku ograničiti ćemo se na nehomogene obične linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda

$$L_x u(x) = f(x) \ ,$$

gdje je L_x linearni diferencijalni operator. Ideja je prvo riješiti slijedeći problem

$$L_x G(x, y) = \delta(x - y) \ .$$

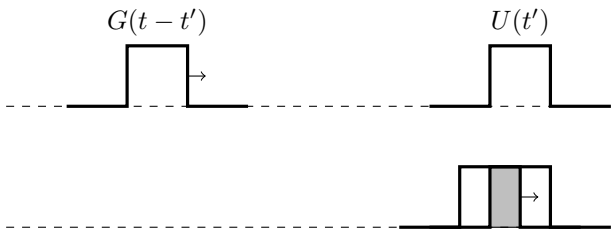
Tvrdimo da je jedno partikularno rješenje dano izrazom

$$u_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x')f(x')\,dx' \ . \tag{3.40}$$

To je lako i pokazati

$$L_x u_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} L_x G(x, x')f(x')\,dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x')f(x')\,dx' = f(x) \ .$$

Funkciju $G(x, y)$ zovemo Greenovom funkcijom problema. Fizikalno, možemo je razumijeti kao odziv na jediničnu pobudu.



Slika 3.2: Na gornjoj slici je Greenova funkcija $G(t-t')$ i pobuda $U(t')$ u nekom ranom trenutku. Konvolucija $I(t)$ će biti različita od nule kada se Greenova funkcija počne preklapati s pobudom, što je na donjoj slici prikazano osjenčanim područjem.

Primjer 3.23. Neka je Greenova funkcija problema dana s

$$G(t) = \begin{cases} 1\,, & 0 < t < 1 \\ 0\,, & t < 0,\, t > 1 \end{cases} ,$$

te neka je i pobuda sistema $U(t)$ definirana istim izrazom. Pronađite **konvoluciju** $I(t)$ Greenove funkcije s pobudom, tj. odziv sistema

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')U(t')\,dt' \ .$$

R. Promatramo kako $G(t-t')$ evoluira s t', te tamo gdje se funkcije preklapaju, integral je različit od nule. Za $t < 0$ imamo stoga $I(t) = 0$, vidi Sliku 3.2. U intervalu $0 < t < 1$ slijedi

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')U(t')\,dt' = \int_0^1 G(t-t')\,dt' = \int_t^{t-1} G(u)\,(-du) = \int_0^t G(u)\,du = t\ .$$

Za $1 < t < 2$

$$I(t) = \int_0^1 G(t-t')\,dt' = \int_t^{t-1} G(u)\,(-du) = \int_{t-1}^1 G(u)\,du = 2 - t\ .$$

Ako je $t > 2$, slijedi da je $I(t) = 0$.

Primjer 3.24. Metodom Greenove funkcije, pronađite ukupno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'(t) + ay(t) = f(t)\ ,$$

gdje je $a > 0$, te

$$f(t) = \begin{cases} 1\,, & |t| < t_0 \\ 0\,, & |t| \geq t_0 \end{cases} .$$

Početni uvjet je $y(0) = 0$.

R. Greenova funkcija definirana je jednadžbom

$$\left(\frac{d}{dt} + a\right) G(t-t') = \delta(t-t')\ .$$

Rješenje tražimo u pomoću Fourierovog transformata

$$G(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega(t-t')} g(\omega) \ .$$

Uvrštavanjem u gornju jednadžbu, te korištenjem integralne reprezentacije δ-funkcije (3.21), imamo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-i\omega + a\right] g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \ ,$$

pa je

$$G(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{-i\omega + a} \ .$$

Integral rješavamo preko teorema o reziduumu. Promatramo

$$\oint \frac{e^{-iz(t-t')}}{-iz + a} \, dz \ .$$

Za $t - t' > 0$ krivulju zatvaramo polukružnicom radijusa $R \to \infty$ na $\mathrm{Im}(z) < 0$, pa, s obzirom na to da imamo pol prvog reda u $z = -ia$, imamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix(t-t')}}{-ix + a} \, dx = -2\pi i \mathrm{Res}(-ia) = 2\pi e^{-a(t-t')} \ .$$

Za $t - t' < 0$ krivulju moramo zatvoriti na $\mathrm{Im}(z) > 0$, čime je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix(t-t')}}{-ix + a} \, dx = 0 \ .$$

Slijedi

$$G(t-t') = e^{-a(t-t')} \theta(t-t') \ .$$

Partikularno rješenje slijedi iz (3.40)

$$y_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') f(t') \, dt' = \int_{-\infty}^{t} e^{-a(t-t')} f(t') \, dt' \ .$$

Za $t < -t_0$ imamo $y_p(t) = 0$. Za $-t_0 < t < t_0$

$$y_p(t) = \int_{-t_0}^{t} e^{-a(t-t')} \, dt' = \frac{1}{a} \left[1 - e^{-a(t+t_0)}\right] \ .$$

U slučaju $t > t_0$, slijedi

$$y_p(t) = \int_{-t_0}^{t_0} e^{-a(t-t')} \, dt' = \frac{1}{a} \left[e^{-a(t-t_0)} - e^{-a(t+t_0)}\right] = 2 \, \frac{\mathrm{sh}\,(at_0)}{a} e^{-at} \ .$$

Rješenje homogene jednadžbe je $y_h(t) = A\, e^{-at}$, pa je ukupno rješenje $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$. Ako odaberemo početni uvjet da $y(0) = 0$, slijedi da je $A = 0$. Tada je $y(t) = y_p(t)$.

Fizikalna situacija kod koje srećemo gornju diferencijalnu jednadžbu je npr. LR krug

$$L\frac{di}{dt} + Ri = v(t) \ ,$$

gdje je L induktivitet, R otpor. Pobuda sistema je dana vanjskim naponom $v(t)$, a odziv strujom $i(t)$. Tako partikularno rješenje za $-t_0 < t < t_0$ predstavlja

punjenje zavojnice. Nakon prestanka djelovanja pobude ($t > t_0$), zavojnica se prazni, vidi sliku xx.

Primjetimo također da u slučaju $a = 0$ Greenova funkcija postaje jednostavno $G(t - t') = \theta(t - t')$, što je još jedan način na koji možemo razumijeti identitet (3.26).

Primjer 3.25. Tijelo mase m pada u gravitacijskom polju g kroz medij u kojem je sila trenja proporcionalna brzini tijela. Postavite jednadžbu gibanja tijela, a potom je rješite metodom Greenove funkcije. Uvjerite se da u granici malog gušenja ukupno rješenje poprima poznati oblik

$$y(t) = \frac{1}{2} g t^2 \ .$$

R. Iz drugog Newtonovog zakona, imamo

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \beta \frac{dy}{dt} = f(t) = g \ ,$$

gdje smo uveli pokratu $\beta = b/m$, a $y(t)$ je trajektorija gibanja. Jednadžbu za Greenovu funkciju

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \beta \frac{d}{dt} \right) G(t - t') = \delta(t - t') \ ,$$

rješavamo pomoću Fourierovog transformata

$$G(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega(t-t')} g(\omega) \ .$$

Slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [(-i\omega)^2 + \beta(-i\omega)] g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \ ,$$

odnosno

$$G(t - t') = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega(\omega + i\beta)} \ .$$

S obzirom na pol u ishodištu, Greenovu funkciju valja regularizirati. Uzeti ćemo da je definicija Greenove funkcije dana kao glavna vrijednost integrala po realnoj osi. Promatramo

$$\oint \frac{e^{-iz(t-t')}}{z(z + i\beta)} \, dz \ ,$$

gdje je integracijska krivulja definirana tako da, krivulju na realnoj osi, za $t - t' > 0$, zatvaramo na $\mathrm{Im}(z) < 0$, a za $t - t' < 0$ zatvaramo na $\mathrm{Im}(z) > 0$. Reziduumi su dani s

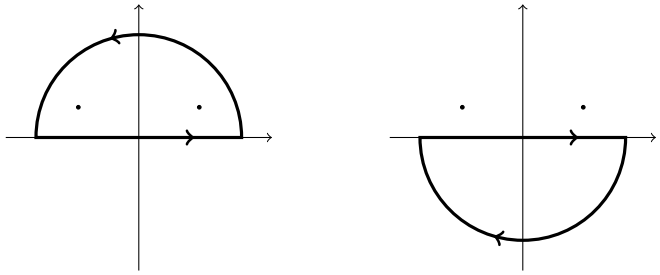
$$\mathrm{Res}(0) = \frac{1}{i\beta} \, , \qquad \mathrm{Res}(-i\beta) = -\frac{e^{-\beta(t-t')}}{i\beta} \ .$$

pa je

$$G(t - t') = \begin{cases} -\frac{1}{2\beta} \ , & t - t' < 0 \\ -\frac{1}{2\beta} \left[-1 + 2e^{-\beta(t-t')} \right] \ , & t - t' > 0 \end{cases} \ .$$

Partikularno rješenje je stoga

$$y_p(x) = -\frac{1}{2} \left[\frac{g}{\beta} \int_{-\infty}^{t} (2e^{-\beta(t-t')} - 1) \, dt' + \frac{g}{\beta} \int_{t}^{\infty} dt' \right] \ .$$



Slika 3.3: Konture integracije za račun Greenove funkcije za gušeni harmonički oscilator u slučaju $t > t'$, te $t < t'$.

Integrali s konstantnim integrandom se mogu posložiti na slijedeći način

$$-\int_{-\infty}^{t} dt' + \int_{t}^{\infty} dt' = -\int_{-t}^{\infty} dt' + \int_{t}^{\infty} dt' = -\int_{-t}^{t} dt' = -2t \ .$$

Preostali integral je

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-t')}\, dt' = \frac{1}{\beta} \ ,$$

pa sve skupa imamo

$$y_p(t) = \frac{g}{\beta}\, t - \frac{g}{\beta^2} \ .$$

Na prvi pogled, u granici malog gušenja $\beta \to 0$, imamo nefizikalno rješenje. Međutim, tek ukupno rješenje

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \ ,$$

je od fizikalnog značaja. Tako u ovom slučaju imamo $y_h(t) = C_1 + C_2 e^{-\beta t}$ kao rješenje homogene jednadžbe. Ukupno rješenje je tada

$$y(t) = A + Be^{-\beta t} + \frac{g}{\beta^2}\, \beta t \ .$$

Konstante A i B možemo odrediti iz početnih uvjeta. Ako uzmemo $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, slijedi $A = -B$, te $A = g/\beta^2$, pa je

$$y(t) = \frac{g}{\beta^2}(\beta t - 1) + \frac{g}{\beta^2}\, e^{-\beta t} \ ,$$

što u granici $\beta \to 0$ postaje

$$y(t) = \frac{1}{2}\, gt^2 - \frac{1}{3} g\beta t^3 + \dots \ .$$

Dakle, ukupno rješenje ima ispravnu granicu malog gušenja.

Primjer 3.26. Pronađite Greenovu funkciju tjerano-gušenog harmoničkog oscilatora

$$L_t x(t) = f(t) \qquad L_t = \frac{d^2}{dt^2} + 2b\, \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \ ,$$

gdje je $b > 0$.

R. Greenova funkcija definirana je s

$$L_t G(t,t') = \delta(t-t') \ .$$

Problem rješavamo pomoću Fourier transformata

$$G(t,t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}\, g(\omega) e^{i\omega(t-t')}\, d\omega \ ,$$

Ako to ubacimo u diferencijalnu jednadžbu, slijedi

$$\begin{aligned} L_t G(t,t') &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}\, g(\omega)(-\omega^2 + 2bi\omega + \omega_0^2) e^{i\omega(t-t')}\, d\omega \\ &= \delta(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi}\, e^{i\omega(t-t')}\, d\omega \ , \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili integralnu reprezentaciju δ-funkcije (3.21). Zbog linearne nezavisnosti, gornja jednadžba je zadovoljena ako

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{1}{-\omega^2 + 2bi\omega + \omega_0^2} \ ,$$

pa je

$$G(t,t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi}\, \frac{e^{i\omega(t-t')}}{-\omega^2 + 2bi\omega + \omega_0^2}\, d\omega \ .$$

Promatramo integral

$$\oint \frac{e^{iz(t-t')}}{-z^2 + 2biz + \omega_0^2}\, dz \ .$$

Imamo dva pola prvog reda u točkama

$$z_\pm = ib \pm \sqrt{\omega_0^2 - b^2} \equiv ib \pm \gamma$$

Za slabo gušeni oscilator imamo $\omega_0 > b$, pa je $\gamma \in \mathbb{R}$. Reziduumi su

$$\mathrm{Res}(z_\pm) = \lim_{z\to z_\pm} \frac{e^{iz(t-t')}}{-(z-z_\mp)} = \frac{1}{2\gamma}\, e^{(-b\pm i\gamma)(t-t')} \ .$$

Primjetimo, u slučaju kada je $t < t'$ integral isčezava, vidi Sliku 3.3. Sve skupa, imamo

$$G(t,t') = \frac{1}{\gamma}\, e^{-b(t-t')} \sin(\gamma(t-t'))\theta(t-t') \ .$$

Primjetimo kako su imaginarni dijelovi polova Greenove funkcije odgovorni za eksponencijalno trnjenje rješenja u vremenu. U slučaju kada bi trenje, odnosno "gušenje" bilo odsutno ($b = 0$), polovi bi došli na realnu os. Praktičan način rješavanja ovakvog idealiziranog slučaja jest uvođenje proizvoljno malog trenja ($b = \epsilon$), čime polove pomičemo iznad realne osi, potom pronalaženje Greenove funkcije i partikularnog rješenja, te na kraju promatranje limesa $b \to 0$.

Nadalje, valja uočiti pojavu θ-funkcije u Greenovoj funkciji: to znači da rješenje "pazi" na **kauzalnost**. Tjeranje koje vanjska sila izvrši na oscilatoru u trenutku t' ne može utjecati na ponašanje oscilatora u trenutku t ako je $t' > t$. Eksplicitno, integracija u (3.40) proteže se do $t' = t$

$$x_p(t) = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{t} f(t') e^{-b(t-t')} \sin[\gamma(t-t')]\, dt' \ ,$$

što fizikalno čitamo kao: uzrok prethodi posljedici.

3.5 ♣ ZADACI

1. Deformacija štapa $u(x)$ čvrstoće c pod utjecajem vanjske sile $f(x)$ modelira se diferencijalnom jednadžbom

$$-cu''(x) = f(x) \ .$$

Pronađite Greenovu funkciju problema ako je štap pričvršćen na krajevima $u(0) = 0$, $u(1) = 0$.

2. Pomoću metode Greenove funkcije pronađite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe

a)
$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x^2 e^x \ ,$$

b)
$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{\sin x} \ ,$$

c)
$$y''(x) - 4y(x) = \operatorname{sh} x \ ,$$

d)
$$y''(x) + y(x) = \theta(x)\theta(1-x) \ .$$

Poglavlje 4

Parcijalne diferencijalne jednadžbe

§ 4.1 Opća klasifikacija

Parcijalna diferencijalna jednadžba, ili skraćeno PDJ, definira ponašanje funkcije u koja ovisi o dvije ili više nezavisnih varijabli, pomoću parcijalnih derivacija funkcije u, ponekad same funkcije u, i funkcija nezavisnih varijabli u problemu. **Red** PDJ je red najviše derivacije u jednadžbi. Na primjer, općenita PDJ prvog reda funkcije $u : D \to \mathbb{R}$, gdje je $D \subseteq \mathbb{R}$, ima oblik

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \ , \tag{4.1}$$

a općenita PDJ drugog reda oblik

$$G(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \ , \tag{4.2}$$

gdje su F i G neke neprekidne funkcije u svim svojim argumentima.

Tipovi PDJ

Za PDJ kažemo da je **linearna** ako se nepoznata funkcija u i sve njene parcijalne derivacije u jednadžbi pojavljuju linearno (koeficijenti uz parcijalne derivacije funkcije u su funkcije nezavisnih varijabli, ali ne i same funkcije u ili njenih parcijalnih derivacija), npr.

$$f(x, y)u_{xx} + g(x, y)u_y + h(x, y)u = 0 \ .$$

Semilinearna PDJ podrazumijeva da se sve parcijalne derivacije funkcije u pojavljuju linearno, ali sama funkcija u ne nužno, npr.

$$\nabla^2 u = f(u)$$

gdje je f bilo koja nelinearna funkcija.

Kod **kvazilinearne** PDJ parcijalne derivacije najvišeg reda u jednadžbi pojavljuju se linearno s koeficijentima koji su funkcije nezavisnih varijabli, same funkcije u i njenih parcijanih derivacija nižeg reda, npr. Burgersova jednadžba bez disipacije,

$$u_t + f(u)u_x = 0 \ ,$$

Korteweg-de Vriesova jednadžba

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \ ,$$

ili jednadžba minimalne plohe

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0 \ .$$

Konačno, PDJ je **nelinearna** ako ne pripada niti jednoj od gore definiranih kategorija, npr.

$$(u_x)^2 + u_t = 0 \ .$$

Općenita linearna PDJ ima oblik

$$L[u] = f \ , \tag{4.3}$$

gdje je L linearni diferencijalni operator, a f neka funkcija. U slučaju kada je $f = 0$ kažemo da je posrijedi **homogena** PDJ. U slučaju linearne PDJ drugog reda, operator L općenito je oblika

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} B_k \frac{\partial}{\partial x_k} + C \tag{4.4}$$

gdje su A_{ij}, B_j i C neke funkcije. Označimo s $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ svojstvene vrijednosti matrice A, te neka je među njima p pozitivnih, q negativnih i r svojstvenih vrijednosti koje su nula (dakle, $p + q + r = n$). Tada parcijalne diferencijalne jednadžbe dijelimo na

a) **eliptičke**: $p = n$ ili $q = n$,

b) **paraboličke**: $p = n - 1$ i $r = 1$ ili $q = n - 1$ i $r = 1$,

c) **hiperboličke**: $p = n - 1$ i $q = 1$ ili obratno,

d) **ultrahiperboličke**: $p > 1$, $q > 1$ i $r = 0$.

Ukoliko svojstvene vrijednosti mijenjaju predznak na području na kojem je diferencijalna jednadžba zadana govorimo o tipu diferencijalne jednadžbe u danoj točki; drugim riječima, gornja podjela vrijedi samo **lokalno**.

Metode rješavanja

Za semilinearne PDJ prvog reda

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = f(x, y, u) \ , \tag{4.5}$$

primjenjuje se **metoda karakteristika**. Glavna motivacija je pokušati svesti PDJ na ODJ. Ideja je uvesti parametarski zadane krivulje u xy ravnini: $x = x(s)$, $y = y(s)$. Tada rješenje $u(x, y)$ postaje funkcija parametra s tako da

$$\frac{du}{ds} = \frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{ds}\frac{\partial u}{\partial y} \ . \tag{4.6}$$

Glavni korak u ovoj metodi je usredotočiti se na familiju krivulja definiranu s

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y) \, , \qquad \frac{dy}{ds} = b(x, y) \ , \tag{4.7}$$

jer tada PDJ (4.5) postaje ODJ

$$\frac{du}{ds} = f(x(s), y(s), u) \ . \tag{4.8}$$

Tako definirane krivulje zovu se **karakteristične krivulje**, ili samo **karakteristike**. Rubni uvjet na $u(x, y)$ dovodi u vezu integracijske konstante iz (4.7) s parametrom s. Geometrijski, rubni uvjet predstavlja krivulju u xy ravnini koju familija karakteristika mora sijeći.

Separacija varijabli je uobičajena metoda rješavanja linearnih PDJ višeg reda: sastoji se od toga da nepoznatu funkciju $u(x, y, \dots)$ napišemo kao umnožak zasebnih funkcija, od kojih svaka ovisi samo o jednoj varijabli,

$$u(x, y, \dots) = X(x)Y(y) \cdots$$

te potom to vratimo natrag u početnu diferencijalnu jednadžbu. U sljedećem koraku pokušavamo odvojiti dio koji ovisi samo o jednoj varijabli (npr. x) na jednu stranu, a ostale izraze na drugu stranu jednadžbe. Takvu jednakost je moguće ispuniti samo ukoliko su obje strane konstantne, odnosno jednake tzv. **separacijskoj konstanti**. Ova tehnika omogućava da se parcijalna diferencijalna jednadžba prikladno rastavi na sustav običnih diferencijalnih jednažbi, koje se onda rješavaju poznatim tehnikama.

Primjeri linearnih PDJ

Valna jednadžba je linearna PDJ oblika

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \ , \tag{4.9}$$

hiperboličkog tipa jer je $A = -\mathrm{diag}(-1, c^2, c^2, c^2)$, gdje je $u(\mathbf{r}, t)$ elongacija (amplituda) medija u nekoj točci prostora $\mathbf{r}$, za dani trenutak t. Realna konstanta c ima značenje brzine prostiranja valova, a ∇^2 Laplaceov operator. Fizikalno, valna jednadžba generalizira koncept malih titranja na sustave s beskonačno mnogo stupnjeva slobode. Odziv medija (žice, membrane i sl.) je stoga harmonički (bez gušenja). Osim toga, valnu jednadžbu susrećemo i pri opisu elektromagnetskih valova u praznom prostoru.

Toplinskom jednadžbom opisujemo difuziju topline u mediju. To je linearna PDJ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u \ , \tag{4.10}$$

paraboličkog tipa jer je $A = \mathrm{diag}(1,1,1,0)$, gdje je $u(\mathbf{r},t)$ temperatura medija u točci $\mathbf{r}$, u trenutku t. Realna konstanta a ima značenje difuzivnosti medija

$$a^2 = \frac{\kappa}{\sigma\rho} \ , \tag{4.11}$$

gdje je κ termalna vodljivost, σ je specifični toplinski kapacitet, a ρ gustoća materijala. Njen fizikalni smisao je jednostavno diferencijalni zapis jednadžbe kontinuiteta. Naime, preko Gaussova zakona

$$\rho\sigma\frac{\partial Q}{\partial t} = \kappa \int_{S(V)} d\mathbf{S}(\nabla u) \ .$$

Uz

$$Q = \int_V dV u(\mathbf{r},t) \ ,$$

lijeva strana prethodne jednažbe ima značenje promjene energije u jedinici vremena u volumenu V, što po desnoj strani jednadžbe mora biti proporcionalno toku gradijenta temperature kroz površinu $S(V)$. Drugim riječima, jedina promjena energije unutar volumena V dolazi od toplinske difuzije kroz površinu tog volumena.

Poissonovu jednadžbu susrećemo u elektrostatici. U SI sustavu

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \ , \tag{4.12}$$

gdje je $\phi(\mathbf{r})$ potencijal, a $\rho(\mathbf{r})$ gustoća naboja u $\mathbf{r}$. S obzirom na to da je $A = (1,1,1)$ Poissonova jednadžba je primjer eliptičke jednadžbe.

Za dio prostora bez naboja vrijedi **Laplaceova jednažba**

$$\nabla^2\phi = 0 \ , \tag{4.13}$$

gdje $\phi(\mathbf{r})$, osim potencijala, može biti i stacionarno rješenje valne ili toplinske jednadžbe.

Schrödingerova jednadžba je

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V(\mathbf{r})\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \ ,$$

gdje je $\Psi(\mathbf{r},t)$ valna funkcija čestice mase m s potencijalnom energijom $V(\mathbf{r})$. Ovo je primjer paraboličke PDJ jer je (do na konstantan faktor) $A = \mathrm{diag}(1,1,1,0)$. S druge strane njen stacionarni (vremenski neovisan) slučaj

$$-\frac{\hbar^2 2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \ ,$$

je primjer eliptičke PDJ jer je (do na konstantan faktor) $A = \mathrm{diag}(1,1,1)$.

Rubni uvjeti

Uz danu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu, **rubni uvjeti** u potpunosti karakteriziraju fizikalni problem. To su vrijednosti tražene funkcije u ili njenih derivacija zadani na rubovima područja ($\partial\Omega$) na kojem tražimo rješenje. Razlikujemo tri tipa zadavanja rubnih uvjeta:

(i) **Dirichletov** : $u(\mathbf{r},t)\big|_{\partial\Omega} = f(\mathbf{r},t)$.

(ii) **Neumannov** : $\partial u(\mathbf{r},t)\big|_{\partial\Omega} = f(\mathbf{r},t)$.

(iii) **Cauchyev** : kada duž ruba $\partial\Omega$ imamo jednim dijelom Dirichletov, a drugim dijelom Neumannov tip rubnih uvjeta.

(iv) **Robinov** : $[\alpha u(\mathbf{r},t) + \beta\partial_n u(\mathbf{r},t)]_{\partial\Omega} = f(\mathbf{r},t)$, gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

U slučaju da jedna varijabla sistema predstavlja vrijeme, tada se zadavanje funkcije i njenih vremenskih derivacija u nekom odabranom trenutku specijalno naziva **početni uvjet**. Primjeri s titrajućom žicom:

i) držimo jedan učvršćenim, $u(x = L, t) = 0$,

ii) žica je mirno otpuštena u titranje, $u_t(x, 0) = 0$.

Primjeri s grijanom žicom:

(i) držimo jedan kraj na konstantnoj temperaturi T_0 (primjerice, taj kraj uronimo u veliki spremnik temperature T_0)

$$u(x = L, t) = T_0$$

(ii) držimo jedan kraj izoliranim (primjerice, taj kraj je obložen nekakvim topli-nskim izo-lato-rom); kako je tok to-pli-ne pro-porci-ona-lan pro-sto-rnoj derivaciji u_x (toplinska difuzija je proporcionalna gradijentu temperature), izolaciju naznačujemo izjednačimo li je s nulom,

$$u_x(x = L, t) = 0$$

Primjeri s elektrostatskim potencijalom:

(i) držimo jedan rub spojen žicom s konstantnim potencijalom,

(ii) držimo jedan rub izoliranim (time je spriječen dotok ili odlijev naboja na tom mjestu).

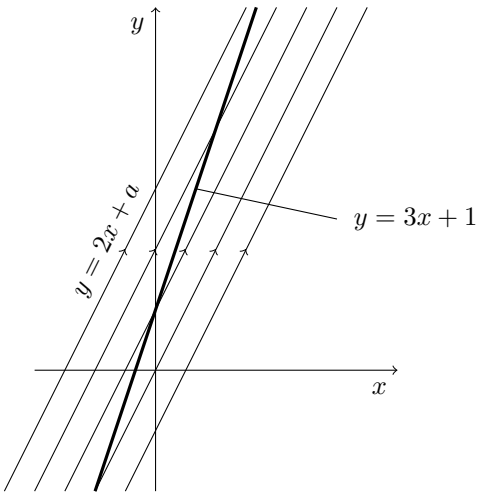
Stacionarno rješenje je postignuto u trenutku kada se funkcija u više ne mijenja u vremenu,

$$u_t = 0 \ .$$

Fizikalno to znači da se nakon dovoljno dugo vremena sustav *primiri* i više se ne događaju nikakve promjene u vremenu.

§ 4.2 Semilinearne PDJ prvog reda

Semilinearne PDJ rješavati ćemo metodom karakteristika.



Slika 4.1: U xy ravnini prikazan je rubni uvjet, kao i familija karakterističnih krivulja obilježenih parametrom a.

Primjer 4.1. Rješite parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$u_x + 2u_y = 1 + u \ ,$$

metodom karakteristika uz rubni uvjet $u(x, y) = \sin x$ na $y = 3x + 1$.

R. Prvi korak je definicija karakteristika $x = x(s)$, $y = y(s)$

$$\frac{dx}{ds} = 1 \, , \qquad \frac{dy}{ds} = 2 \ .$$

Rješenja gornjih jednadžbi su

$$x(s) = s + x_0 \, , \qquad y(s) = 2s + y_0 \ .$$

Karakteristike su dane s $y = 2x + a$, gdje je a integracijski parametar. Vidimo da bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je $y_0 = 0$.

Zadana PDJ postaje

$$\frac{du}{ds} = 1 + u \ ,$$

čije je rješenje $u = Ae^s - 1$. Sada valja iskoristiti rubni uvjet. Na slici 4.1 dan je grafički prikaz nekoliko karakterističnih krivulja te rubnog uvjeta. Uvjet $y = 3x + 1$ daje $s + 3x_0 + 1 = 0$. Uvjet $u = \sin x$ daje

$$Ae^s - 1 = \sin(s + x_0) \ ,$$

odnosno

$$A(x_0) = -e^{3x_0+1} \sin(2x_0 + 1) + 1 \ .$$

Tada je rješenje u varijablama x_0, s dano kao

$$u(x_0, s) = A(x_0)e^s - 1 \ .$$

Ako iskoristimo parametarske definicije karakteristika $s = y/2$, te $x_0 = x - y/2$ rješenje možemo napisati pomoću varijabli x, y

$$u(x, y) = e^{3x-y+1}[1 - \sin(2x - y + 1)] - 1 \ .$$

Primjer 4.2. Rješite parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$(x+y)u_x + yu_y = xyu \ ,$$

metodom karakteristika uz rubni uvjet $u(x,y) = e^{x^2/4}$ na $y = x$.

R. Definiramo karakteristične krivulje

$$\frac{dx}{ds} = x + y \,, \qquad \frac{dy}{ds} = y \ .$$

Iz druge jednadžbe slijedi $y(s) = y_0 e^s$. Ako odaberemo $y_0 = 1$ onda prva jednadžba glasi

$$\frac{dx}{ds} - x = e^s \ .$$

Ovu linearnu nehomogenu jednadžbu možemo rješiti standardnim tehnikama. Primjena formule (2.5) daje

$$x(s) = (s + x_0)e^s \ .$$

Početna PDJ postaje ODJ

$$\frac{du}{ds} = xyu = (s + x_0)e^{2s}u \ .$$

Njeno rješenje je

$$u(x_0, s) = A \exp\left[\frac{1}{4}e^{2s}(2s + 2x_0 - 1)\right] \ .$$

Rubni uvjet $x = y$ daje vezu između s i x_0

$$s + x_0 = 1 \ .$$

Rubni uvjet na rješenje $u(x,y) = e^{x^2/4}$ daje

$$A \exp\left[\frac{1}{4}e^{2(1-x_0)}(2 - 2x_0 + 2x_0 - 1)\right] = \exp\left[\frac{1}{4}e^{2(1-x_0)}\right] \ .$$

odnosno $A = 1$. Inverzija varijabli

$$s = \ln y \,, \qquad x_0 = \frac{x}{y}\ln y \ ,$$

daje rješenje preko x i y

$$u(x,y) = \exp\left[\frac{1}{4}e^{2\ln y}(2\ln y + 2\frac{x}{y} - 2\ln y - 1)\right] = \exp\left(\frac{xy}{2} - \frac{y^2}{4}\right) \ .$$

Primjer 4.3. Rješite parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i u = \alpha u \ ,$$

metodom karakteristika uz rubni uvjet $u(x_1, \ldots, x_n) = u_0$ na $x_n = 1$.

R. Diferencijalna jednadžba za karaketristike

$$\frac{dx_i}{ds} = x_i \ ,$$

ima rješenja $x_i(s) = x_i^0 e^s$. Zadana PDJ postaje ODJ

$$\frac{du}{ds} = \alpha u \ ,$$

čije je rješenje $u = Ae^{\alpha s}$.

Rubni uvjet $x_n = 1$ daje $e^s = 1/x_n^0$. Rubni uvjet $u = u_0$ daje $A = u_0(x_n^0)^\alpha$. Tada ukupno rješenje možemo napisati kao

$$u(x_n^0, s) = u_0(x_n^0)^\alpha e^{\alpha s} \ .$$

Uvrštavanjem $e^s = x_n/x_n^0$ dobivamo

$$u(x_1, \ldots, x_n) = u_0 x_n^\alpha \ .$$

4.2 ♣ ZADACI

1. blabla..

§ 4.3 Problemi u jednoj prostornoj dimenziji

Primjer 4.4. Nit duljine L pričvršćena je na rubovima. U $t = 0$ njen oblik je dan funkcijom $f(x)$, a početna brzina funkcijom $g(x)$. Pronađite oblik niti u kasnijim trenucima. Izvrijednite Fourierove koeficijente u slučaju kada je

$$f(x) = \begin{cases} x \ , & 0 < x < L/2 \\ L - x \ , & L/2 < x < L \end{cases}$$

$$g(x) = \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) \ .$$

R. Valnu jednadžbu

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \ ,$$

rješavamo metodom separacije varijabli $u(x,t) = X(x)T(t)$. Slijedi

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda \, .$$

Posljedni korak znači da je gornji izraz nužno jednak konstanti, za koju odabiremo da je negativna $\lambda = -k^2$. Općenita rješenja su dana s

$$T(t) = A_1 \sin(ckt) + B_1 \cos(ckt) \, ,$$

$$X(x) = A_2 \sin(kx) + B_2 \cos(kx)\,,$$

gdje smo uveli pokratu $\omega = ck$.
Rubni uvjet $u(0,t) = 0$ daje $B_1 = 0$, dok $u(L,t) = 0$ je zadovoljen uz

$$\sin(kL) = 0\,, \quad k_n = \frac{n\pi}{L}\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Ukupno rješenje je Fourierov red

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,.$$

Lako je pokazati da izborom pozitivne separacijske konstante nije moguće zadovoljiti rubne uvjete. Također, rješenje s $\lambda = 0$ je uz dane rubne uvjete trivijalno, tj. nula. Time smo iscrpili sve moguće vrijednosti za λ. Preostale konstante A_n i B_n određujemo iz početnih uvjeta:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \;\to\; B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\,,$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \;\to\; A_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\,.$$

Za navedeni izbor $f(x)$ i $g(x)$ izračun Fourierovih koeficijenata se svodi na primjenu elementarnog integrala

$$\int x \sin(ax) dx = \frac{1}{a^2}\left[\sin(ax) - ax\cos(ax)\right]\,,$$

što daje

$$A_n = \frac{L}{n\pi c}\delta_{n4}\,,$$
$$B_n = \frac{4L}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\,.$$

Primjer 4.5. Pokažite da je rješenje valne jednadžbe $u_{xx} = c^2 u_{tt}$ uvijek moguće napisati u obliku

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)\,.$$

R. Uvedimo varijable

$$m = x + ct\,, \quad s = x - ct$$

Nadalje,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial m} + \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial m} + \frac{\partial u}{\partial s}\,,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial m} + \frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial s} = c\frac{\partial u}{\partial m} - c\frac{\partial u}{\partial s}\,,$$

te

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial m^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial m\,\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\,,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial m^2} - 2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial m\,\partial s} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\,.$$

Uvrštavanjem natrag u valnu jednadžbu dobivamo

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial m\,\partial s} = 0\,,$$

što možemo razumijeti na dva načina:

$$\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial s} = G(s)\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial m}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial m} = F(m)\ .$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial s}\,ds + \frac{\partial u}{\partial m}\,dm = F(m)dm + G(s)ds\ .$$

Integriranjem dobijemo

$$u = f(m) + g(s) + \text{konstanta}\ .$$

Konstanta nastala pri integriranju ne predstavlja nikakav "problem" - nju možemo po volji uključiti bilo u funkciju $f(m)$ ili funkciju $g(s)$. Time je pokazana tražena tvrdnja.

Ovaj oblik nam govori da se svako rješenje valne jednadžbe sastoji od dva dijela: jednog koji se giba u smjeru pozitivne x-osi (na desno) i drugog koji se giba u smjeru negativne x-osi (na lijevo). Pod *gibanjem* podrazumjevamo sljedeće: promatrajmo npr. u funkciji $f(x-ct)$ neku konkretnu vrijednost koju je ona poprimila onda kada je argument bio jednak nekom broju x_0, $x-ct = x_0$. U nekim drugim trenucima taj isti argument će se pojaviti na onim točkama s koordinatom x koja zadovoljava uvjet $x = x_0 + ct$, dakle kako se pomičemo naprijed u vremenu to su točke s rastućom vrijednosti koordinate x - ona početna vrijednost funkcije $f(x_0)$ se *pomakla na desno*. Analogan način zaključivanja možemo primjeniti i kod funkcije $g(x-ct)$.

Primjer 4.6. Žici duljine L držimo oba kraja na temperaturi 0. U početnom trenutku distribucija temperature zadana je s $f(x)$. Pronađite temperaturu u kasnijim trenucima.

R. Toplinska jednadžba

$$u_t = a^2 u_{xx}\ ,$$

nakon separacije varijabli $u(x,t) = X(x)T(t)$ postaje

$$\frac{1}{a^2}\frac{\dot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda\,,$$

gdje smo uveli separacijsku konstantu λ. Odabiremo $\lambda = -k^2$. Tada

$$X(x) = A_1 \sin(kx) + B_1 \cos(kx)\,,$$

$$T(t) = A_2 \exp(-k^2 a^2 t)\,.$$

Rubni uvjet $u(0,t) = 0$ zahtijeva da je $A_1 = 0$, dok $u(L,t) = 0$ može biti zadovoljen jedino ako je $k_n = n\pi/L$. Lako se može uvjeriti da drugi odabir separacijske konstante λ nije u skladu s rubnim uvjetima.

Općenito rješenje je dano superpozicijom

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-q_n^2 a^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ .$$

Koeficijenti A_n se određuju iz početnog uvjeta

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \;\to\; A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\,.$$

Primjer 4.7. Izračunajte raspodjelu temperature za žicu iz prethodog primjera, ali uz pretpostavku da je lijevi kraj na temperaturi T_1, a desni na nekoj $T_2 > T_1$.

R. Zbog linearnosti jednažbe, pri rješavanju se koristimo principom superpozicije. Dinamičko rješenje za koje su rubovi na temperaturi 0 već imamo

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-q_n^2 a^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ ,$$

ali, koeficijente A_n ostavljamo za sad neodređene. Za drugo rješenje možemo iskoristiti

$$u_2(x,t) = Ax + B\ ,$$

dobiveno u slučaju separacijska konstanta $k = 0$. Napomenimo da ovo predstavlja statičko rješenje, pa je pogodno za zadovoljiti

$$u_2(0,t) = T_1\,, \qquad u_2(L,t) = T_2\ .$$

Slijedi

$$u_2(x,t) = \Delta T\frac{x}{L} + T_1\,, \qquad \Delta T = T_2 - T_1 > 0\ .$$

Ukupno rješenje

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)\ ,$$

također zadovoljava gornje rubne uvjete. Nametanje početnog uvjeta na gornje rješenje određuje koeficijente Fourierovog razvoja

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - \frac{2}{n\pi}\left[T_1 + (-1)^{n+1}T_2\right]\ .$$

Primjer 4.8. Žica dluljine L izolirana je na krajevima, kao i duž cijele svoje duljine. Ako je početna raspodjela temperature žice dana s $u(x,0) = f(x)$, pronađite raspodjelu temperature u svim kasnijim trenucima! Kako izgleda stacionarno rješenje?

R. Primjenom metode separacije varijabli (vidi Primjer 4.6) rješenje $u(x,t)$ toplinske jednadžbe

$$u_t = a^2 u_{xx}\ ,$$

može se zapisati kao $u(x,t) = X(x)T(t)$ gdje su

$$X(x) = A_1\sin(qx) + B_1\cos(qx)\,,$$

$$T(t) = A_2\exp(-q^2a^2t)\,,$$

za neiščezavajuću separacijsku konstantu $q^2 \neq 0$, te

$$X(x) = A_0x + B_0\,, \qquad T(t) = C_0\ ,$$

kada je $q^2 = 0$. Ako je žica izolirana na rubovima onda u tim točkama nema prostornog gradijenta temperature

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=L} = 0\,.$$

Primjenom danih rubnih uvjeta imamo $A_1 = 0$, te $\sin(qL) = 0$, respektivno. Potonje vodi na $q_n L = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Za iščezavajuću separacijsku konstantu imamo $A_0 = 0$. Ukupno rješenje je dano kao superpozicija koja uzima u obzir obje klase rješenja

$$u(x,t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\, e^{-q_n^2 a^2 t}\,.$$

Primjena početnog uvjeta $u(x,0) = f(x)$ određuje preostale konstante

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,, \qquad B_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx\,.$$

Stacionarno rješenje dobije se kada $t \to \infty$, te predstavlja prosječnu temperaturu početne raspodjele $u(x,t) \to B_0$.

4.3 ♣ ZADACI

1. Elastična nit duljine L je puštena iz mirovanja, te u početnom trenutku ima oblik
$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & 0 < x < L/4 \\ 4\frac{x}{L} - 1\,, & L/4 < x < L/2 \\ -4\frac{x}{L} + 3\,, & L/2 < x < 3L/4 \\ 0\,, & 3L/4 < x < L \end{cases}$$
Pronađite oblik u svim kasnijim trenucima.

2. U početnom trenutku oblik elastične niti duljine L dan je funkcijom
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{L}\,, & 0 < x < L/4 \\ -\frac{x}{L} + \frac{1}{2}\,, & L/4 < x < 3L/4 \\ \frac{x}{L} - 1\,, & 3L/4 < x < L \end{cases}$$
Ako je nit puštena iz mirovanja, pronađite njen oblik u svim kasnijim trenucima.

3. Lijevi kraj niti duljine L je fiksiran, dok je desni slobodan. Ako nit pustimo iz mirovanja u titranje pronađite oblik niti u kasnijim trenucima. Početni oblik je dan s $u(x,0) = f(x)$ Naputak: na desnom kraju niti nema "povratne" sile: $u_x(L,t) = 0$.

4. Žica duljine L je izolirana na krajevima. Ako je u početnom trenutku raspodjela temperature dana funkcijom
$$f(x) = T_0 \frac{x}{L} e^{-x/L}\,,$$
pronađite temperaturu u bilo kojem kasnijem trenutku.

5. Žici duljine 2 m lijevi kraj se održava na temperaturi 2 °C, dok je desni kraj izoliran. Odredite temperaturu svugdje unutar žice ako je početna temperatura zadana kao

$$T(x,0) = \begin{cases} 100x + 2\,, & 0 < x < 1 \\ 102\,, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

6. Pokažite da je općenito rješenje 2D Laplace-ove diferencijalne jednadžbe oblika

$$u(x,y) = f(x+iy) + g(x-iy)\ .$$

§ 4.4 Problemi u dvije prostorne dimenzije

Problemu u više dimenzija važno je pristupiti sa stanovišta simetrije. Ako nas zanima titranje ili difuzija pravokutne membrane, rješavati ćemo problem u kartezijevom sustavu. U slučaju da promatramo kružne membrane rješenje tražimo u polarnim koordinatama.

Kartezijeve koordinate

Primjer 4.9. Nađite temperature unutar ploče dimenzija $a \times b$, sa zadanim rubnim uvjetima

$$u(x,0) = u(0,y) = u(a,y) = 0 \quad u(x,b) = f(x)\ .$$

R. Stacionarnost zahtijeva $\partial u/\partial t = 0$. Rubni uvjeti nalažu rješavanje u Kartezijevom koordinatnom sustavu

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0\ .$$

Separacija varijabli $u(x,y) = X(x)Y(y)$ uvodi separacijsku konstantu

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = k\ .$$

koja može biti $k \in \mathbb{R}$. S obzirom na rubne uvjete, rješenja u x-smjeru moraju biti oscilatorna. To nas ograničava na klasu rješenja s $k = -\lambda^2 > 0$. Slijedi

$$X(x) = A_1 \sin(\lambda x) + B_1 \cos(\lambda x)\ ,$$

$$Y(y) = A_2 e^{\lambda y} + B_2 e^{-\lambda y}\ .$$

Rubni uvjeti nalažu

$$u(x,0) = 0 \to A_2 = -B_2\,, \quad u(0,y) = 0 \to B_1\ ,$$

te

$$u(a,y) = 0\,, \quad \lambda = \frac{n\pi}{a}\,, \quad n \in \mathbb{N}\ .$$

Ukupno rješenje je superpozicija

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \mathrm{sh}\,\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \ .$$

Rubni uvjet $u(x,b) = f(x)$ definira koeficijente A_n

$$u(x,b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \mathrm{sh}\,\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \ ,$$

$$A_n = \frac{2}{a}\frac{1}{\mathrm{sh}\,\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \ .$$

Primjer 4.10. Pravokutna membrana dimenzija $a \times b$, učvršćena na rubovima, pomaknuta je u početnom trenutku iz ravnotežnog položaja u oblik definiran funkcijom $f(x,y)$. Pronađite oblik membrane u bilo kojem kasnijem trenutku.

R. Rješavamo valnu jednažbu

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} \ .$$

Separacija varijabli $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$ vodi na

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -k^2 \ ,$$

gdje smo uveli separacijsku konstantu λ. Možemo odmah zapisati vremensko ovisni dio rješenja

$$T(t) = A_3 \cos(ckt) + B_3 \sin(ckt) \ .$$

Funkcije $X(x)$ i $Y(y)$ ćemo pronaći uz pomoć još jedne separacije varijabli

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - k^2 = -k_x^2 \ ,$$

što daje

$$X(x) = A_1 \cos(k_x x) + B_1 \sin(k_x x) \quad Y(y) = A_2 \cos(k_y y) + B_2 \sin(k_y y) \ ,$$

gdje je $k_y = \sqrt{k^2 - k_x^2}$. Primjetimo da je nužno $k^2 - k_x^2 > 0$; u suprotnom u y-smjeru dobivamo hiperbolna rješenja koja ne mogu zadovoljiti rubne uvjete. Uz rubne uvjete

$$u(0,y,t) = u(a,y,t) = u(x,0,t) = u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0 \ ,$$

slijedi $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, te $k_x = n\pi/a$, $k_y = m\pi/b$. Početni uvjet $u_t|_{t=0} = 0$ daje $B_3 = 0$, pa ukupno rješenje možemo zapisati kao slijedeću superpoziciju

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos\left(\pi c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}\, t\right) \ .$$

Koeficijenti B_{nm} se računaju iz početnog uvjeta

$$B_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a dx \int_0^b dy f(x,y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \ .$$

Napomenimo da k_x i k_y prirodno generaliziraju pojam valnog broja $2\pi/\lambda$ u valni vektor $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$. Također,

$$\omega_{nm} = c|\mathbf{k}| = \pi c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \ ,$$

predstavlja frekvenciju prirodnih modova (n, m) membrane. Ako različiti modovi imaju istu frekvenciju, onda se to zove **degeneracija**. Obično se javlja u sustavima s nekom simetrijom, tako npr. ovdje za $a = b$ modovi $(2, 1)$ i $(1, 2)$ imaju istu frekvenciju. Zgodno je spomenuti da, za razliku od titranja žice, kod titranja membrane nemamo da su viši modovi višekratnici osnovnog.

Polarne koordinate

Primjer 4.11. Pronađite moguća stacionarna rješenja toplinske jednadžbe u polarnim koordinatama.

R. U polarnim koordinatama r, ϕ imamo

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\phi\phi} \ .$$

Separacija varijabli $u(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$ uvodi separacijsku konstantu

$$r^2 \frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda^2 \ .$$

Slučaj $\lambda \neq 0$ vodi na oscilatorna rješenja za Φ

$$\Phi(\phi) = A_1 \cos(\lambda\phi) + B_1 \sin(\lambda\phi) \ ,$$

dok u radijalnom smjeru imamo Eulerovu diferencijalnu jednažbu

$$r^2 R^{''} + r R^{'} - \lambda^2 R = 0 \ ,$$

koju smo već sreli u 2.3, jednadžba (2.22). Njeno rješenje je

$$R(r) = A_2 r^{\lambda} + B_2 r^{-\lambda} \ .$$

Klasa rješenja s $\lambda = 0$ je dana s

$$\Phi = B_0 + A_0 \phi \, , \quad R(r) = C_0 \ln r + D_0 \ .$$

Primjer 4.12. Kružna ploča polumjera a ima temperaturu ruba definiranu s $f(\phi)$. Pronađite stacionarnu raspodjelu temperature svugdje unutar ploče.

R. Konzistentnost rješenja u ϕ zahtijeva $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$. Ovaj uvjet diskretizira λ na $\lambda = m \in \mathbb{Z}$. Specijalno, za $\lambda = 0$ mora biti $A_0 = 0$. Radijalno rješenje ne smije divegirati u ishodištu, što nas konačno ograničava na slijedeću superpoziciju

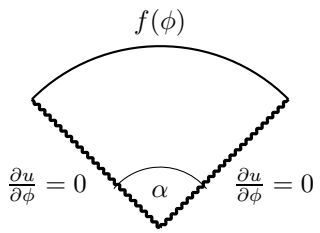
$$u(r, \phi) = D + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \left[A_m \cos(m\phi) + B_m \sin(m\phi) \right] \ , \tag{4.14}$$

gdje D dolazi od rješenja s $\lambda = 0$. Iz rubnog uvjeta $u(a, \phi) = f(\phi)$ smo u stanju projicirati koeficijente

$$A_m = \frac{1}{\pi a^m} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos(m\phi) d\phi \ ,$$

$$B_m = \frac{1}{\pi a^m} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin(m\phi) d\phi \ ,$$

$$D = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi \ .$$



Slika 4.2: Kružni isječak s izoliranim polumjerima.

Primjer 4.13. Kružni isječak polumjera a i središnjeg kuta α ima vanjski rub na temperaturi $f(\phi)$, a polumjere izolirane (vidi sliku 4.2). Pronađite stacionarnu raspodjelu temperature svugdje unutar isječka.

R.

Rubni uvjeti $u_\phi(r,0) = u_\phi(r,\alpha) = 0$ nalažu da rješenje bude oblika

$$u(r,\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{n\pi/\alpha} \cos\left(\frac{n\pi\phi}{\alpha}\right) ,$$

gdje su negativne potencije otpale zbog divergencije u ishodištu. Konstanta A_0 je jedini dio rješenja s iščezavajućom separacijskom konstantom koje preživljava rubne uvjete. Sad možemo iskoristiti posljednji rubni uvjet $u(a,\phi) = f(\phi)$ da odredimo koeficijente A_0 i A_n

$$A_0 = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(\phi) d\phi\,, \quad A_n = \frac{2}{\alpha a^{n\pi/\alpha}} \int_0^\alpha f(\phi)\cos\left(\frac{n\pi\phi}{\alpha}\right) .$$

Primjer 4.14. Isječak kružnog vijenca (radijusi $a > b$, središnji kut α) ima izolirane radijuse i temperature na unutrašnjem i vanjskom rubu zadane raspodjelama $f(\phi)$ i $g(\phi)$, respektivno (vidi sliku 4.3). Pronađite stacionarno rješenje problema!

R. Rubni uvjeti

$$u_\phi(\rho,0) = u_\phi(\rho,\alpha) = 0 ,$$

općenito rješenje iz Primjera 4.11 reduciraju na

$$u(\rho,\phi) = D + C\ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\,\rho^{m\pi/\alpha} + C_m\,\rho^{-m\pi/\alpha}\right)\cos\left(\frac{m\pi\phi}{\alpha}\right) .$$

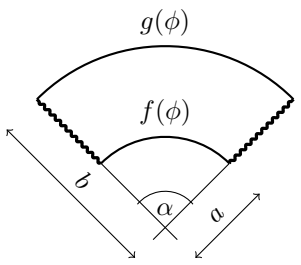
Iz rubnih uvjeta

$$u(a,\phi) = f(\phi) = D + C\ln a + \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\,a^{m\pi/\alpha} + C_m\,a^{-m\pi/\alpha}\right)\cos\left(\frac{m\pi\phi}{\alpha}\right) ,$$

$$u(b,\phi) = g(\phi) = D + C\ln b + \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\,b^{m\pi/\alpha} + C_m\,b^{-m\pi/\alpha}\right)\cos\left(\frac{m\pi\phi}{\alpha}\right) ,$$

fiksiraju se preostale konstante. Primjerice, integriramo li obje jednadžbe po $\int_0^\alpha d\phi$ dobijemo linearni sustav

$$D + C\ln a = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(\phi)\,d\phi ,$$



Slika 4.3: Isječak kružnog vijenca s izoliranim polumjerima.

$$D + C \ln b = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha g(\phi)\, d\phi \ ,$$

čije je rješenje

$$D = \frac{1}{\alpha \ln \frac{a}{b}} \left[\ln a \int_0^\alpha g(\phi)\, d\phi \ - \ln b \int_0^\alpha f(\phi)\, d\phi \right] \ ,$$

$$C = \frac{1}{\alpha \ln \frac{a}{b}} \int_0^\alpha (f(\phi) - g(\phi))\, d\phi \ .$$

S druge strane, integriramo li gornje jednadžbe s $\int_0^\alpha \cos(m\pi\phi/\alpha)\, d\phi$ dobijemo sustav

$$A_m\, a^{m\pi/\alpha} + C_m\, a^{-m\pi/\alpha} = I_m \ ,$$
$$A_m\, b^{m\pi/\alpha} + C_m\, b^{-m\pi/\alpha} = J_m \ ,$$

gdje su

$$I_m = \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha f(\phi) \cos\left(\frac{m\pi\phi}{\alpha}\right)\, d\phi \quad J_m = \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha g(\phi) \cos\left(\frac{m\pi\phi}{\alpha}\right)\, d\phi \ .$$

Pomoću Cramerovog pravila

$$\Delta = (a/b)^{\frac{m\pi}{\alpha}} - (b/a)^{\frac{m\pi}{\alpha}} \ ,$$

$$A_m = \frac{1}{\Delta} \left(b^{-m\pi/\alpha} I_m - a^{-m\pi/\alpha} J_m \right) \ ,$$

$$C_m = \frac{1}{\Delta} \left(a^{m\pi/\alpha} J_m - b^{m\pi/\alpha} I_m \right) \ .$$

4.4 ♣ ZADACI

1. Pronađite stacionarnu raspodjelu temperature unutar ploče dimenzije $a \times a$ sa zadanim rubnim uvjetima

$$u(x,0) = u(x,a) = 0\,, \quad u(0,y) = T_1\,, \quad u(a,y) = T_2 \ .$$

2. Pravokutna ploča dimenzija $a \times b$ ima rube na fiksnoj temperaturi $0°$. Ako je zadana početna temperatura $f(x,y)$, pronađite kasniju temperaturu ploče!

3. Pronađite koeficijente iz Primjera 4.12 za

$$f(x) = \begin{cases} T_1 \ , & 0 < x < \pi \\ T_2 \ , & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Dodatak: rješenje (4.14) može se u ovom slučaju sumirati koristeći formulu

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin(n\theta)}{n} = \operatorname{arctg}\left(\frac{r\sin\theta}{1 - r\cos\theta}\right) \ .$$

4. Kružnom isječku polumjera a i središnjega kuta α vanjski rub ima raspodjelu temperature $f(\phi)$, dok je temperatura na polumjerima 0. Koja je stacionarna raspodjela temperature svugdje unutar kružnog isječka? Ponovite račun ako su na polumjerima temperature $T_1 \neq T_2$.

5. Ploča oblika četvrtine kruga, polumjera a, duž oba je polumjera temperature nula, dok duž kružnog luka pritječe toplina

$$u_\rho(a, \phi) = \frac{u_0}{a} \sin 2\phi \ ,$$

gdje ej $0 < \phi < \pi/2$. Nađite temperaturu ploče u jedinicama u_0 u točci $\phi = \pi/4$, $\rho = a/2$!

6. Ploča oblika isječka kružnog vijenca ($0 < \phi < \alpha$, $a < \rho < b$), duž oba polumjera je izolirana, dok je duž unutrašnjeg kružnog luka temperatura 0. Na vanjskom luku raspodjela temperature je

$$T(b, \phi) = T_0 \cos\left(\frac{2\pi\phi}{\alpha}\right) \ .$$

U xy ravnini je položen beskonačan niz beskonačno dugih metalnih traka širine L i zanemarive debljine. Svaka od njih nalazi se na potencijalu V_0. U prostoru između ploča potencijal je nula. Ukupno možemo pisati

$$V(x, y, 0) = \begin{cases} V_0 \ , & 0 < x < L \\ 0 \ , & L < x < 2L \end{cases}$$

te $V(x + 2L, y, 0) = V(x, y, 0)$. Koliki je potencijal u području $z > 0$? Naputak: kako u xy ravnini potencijal ne ovisi o y, pretpostavite da je tako i u području $z > 0$.

7. U xy ravnini postavljen je beskonačan niz beskonačno tankih metalnih pločica dimenzija $a \times b$ tako da cijela struktura ima oblik šahovske ploče. Svaka pločica nalazi se potencijalu V_0, dok je potencijal između pločica nula. Pronađite potencijal u području $z > 0$. Naputak: potencijal je periodičan u x i y smjeru: $V(x, y, 0) = V(x + 2a, y, 0)$, te $V(x, y, 0) = V(x, y + 2b, 0)$.

8. Polubeskonačna ploča smještena je u području $0 < x < \infty$, te $0 < y < b$ u xy-ravnini. Temperatura iščezava u $x \to \infty$ te po rubovima u $y = 0$, odnosno $y = b$. Ako je u $x = 0$ temperatura dana s $f(y) = u_0$, pronađite stacionarnu raspodjelu temperature svugdje na ploči.

9. U beskonačnoj ravnini imamo šupljinu polumjera a. Pronađite stacionarnu raspodjelu temperature u materijalu pod uvjetom da je na rubu temperatura definirana funkcijom $f(\phi) = \cos^2 \phi$.

§ 4.5 Kontinuirani sustavi

Kod kontinuiranih sistema, rubni uvjeti ne ograničavaju separacijske konstante na neke određene vrijednosti. Kako su separacijske konstante kontinuirane, opće rješenje biti će dano u obliku Fourierovog integrala (3.11), odnosno (3.14). Probleme dijelimo na homogene i nehomogene. Dok homogene rješavamo Fourierovim integralom, za nehomogene koristimo tehniku Greenovih funkcija razvijenu u prošlom poglavlju za obične diferencijalne jednadžbe.

Homogeni sustavi

Primjer 4.15. Tražimo stacionarno rješenje za temperaturu ploče zadanu poluravninom $y > 0$, uz rubni uvjet $u(x, 0) = f(x)$.

R. Tražimo rješenje Laplaceove jednadžbe u dvije dimenzije

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ .$$

Uobičajena separacija varijabli $u(x, y) = X(x)Y(y)$ vodi na

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = k \ .$$

Za separacijsku konstantu k biramo $k = -\lambda^2$, jer jedino u tom slučaju u y-smjeru možemo dobiti da nam funkcija trne u $y \to \infty$. Rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi su

$$X(x) = A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x) \ ,$$
$$Y(y) = A_2 e^{\lambda y} + B_2 e^{-\lambda y} \ .$$

Fizikalno mora vrijediti $\lim_{y\to\infty} u(x, y) = 0$, što ćemo postići s $A_2 = 0$. Opće rješenje glasi

$$u(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda y} \left[A(\lambda) \cos(\lambda x) + B(\lambda) \sin(\lambda x)\right] d\lambda \ .$$

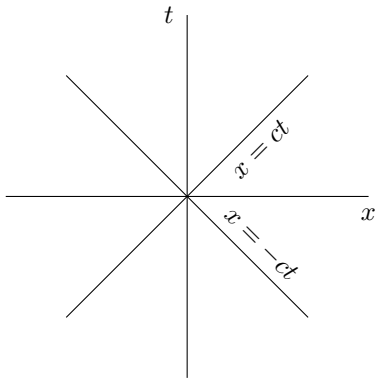
Rubni uvjet $u(x, 0) = f(x)$, daje koeficijente

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos(\lambda u)\, du \ ,$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin(\lambda u)\, du \ ,$$

čime je u principu riješen problem. No, zgodno je koeficijente $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ ubaciti u općenito rješenje. Zamjenom poretka integracije imamo

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) \int_0^\infty d\lambda\, e^{-\lambda y} \cos(\lambda(u - x)) \ .$$



Slika 4.4: Domena ovisnosti i domena kauzalnosti za $x_0 = 0$, $t_0 = 0$.

Posljednji integral se može jednostavno izračunati. Promotrimo

$$I = \int_0^\infty e^{-\lambda y} e^{i\lambda(u-x)}\, d\lambda = \left.\frac{e^{\lambda(-y+i(u-x))}}{-y+i(u-x)}\right|_0^\infty = -\frac{1}{-y+i(u-x)}\ .$$

Zanima nas realni dio gornjeg integrala

$$I = \mathrm{Re}\left[\frac{y+i(u-x)}{y^2+(u-x)^2}\right] = \frac{y}{y^2+(u-x)^2}\ ,$$

čime konačno imamo

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(u)}{y^2+(u-x)^2}\, du\ .$$

Primjer 4.16. Beskonačna žica ima zadani početni oblik funkcijom $f(x)$ te početnu brzinu funckijom $g(x)$. Pronađite oblik žice u svim kasnijim trenucima.

R. Rješavamo valnu jednadžbu za žicu. Separacija varijabli nas vodi na rješenja

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\ ,$$

$$Y(y) = C\cos(\lambda ct) + D\sin(\lambda ct)\ .$$

tako da je $u(x,t) = X(x)T(t)$. Separacijska konstanta je $\lambda \in \mathbb{R}$, pa je općenito rješenje Fourierov integral

$$u(x,t) = \int_0^\infty \big\{[A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)]\cos(\lambda ct) + [C(\lambda)\cos(\lambda x) + D(\lambda)\sin(\lambda x)]\sin(\lambda ct)\big\}\, d\lambda\ .$$

Primjena početnih uvjeta

$$u(x,0) = f(x) = \int_0^\infty [A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)]\, d\lambda\ ,$$

te

$$u_t(x,0) = g(x) = \int_0^\infty (\lambda c)\,[C(\lambda)\cos(\lambda x) + D(\lambda)\sin(\lambda x)]\, d\lambda\ ,$$

daje

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos(\lambda u)\,du\,, \qquad B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin(\lambda u)\,du\ .$$

odnosno

$$C(\lambda) = \frac{1}{\pi c\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\cos(\lambda u)\,du\,, \qquad D(\lambda) = \frac{1}{\pi c\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\sin(\lambda u)\,du\ .$$

Ako sad uvrstimo $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ u prvi dio rješenja imamo

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} d\lambda[A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)]\cos(\lambda ct)& \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} du\, f(u)\cos(\lambda(x-u))\cos(\lambda ct) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} du\, f(u)[\cos\lambda(x+ct-u) + \cos\lambda(x-ct-u)] \\ &= \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)]\ ,\end{aligned}$$

gdje smo u predzadnjem redu jednostavno prepoznali definiciju Fourierovog integrala. Drugi dio rješenja

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\pi c\lambda}[C(\lambda)\cos(\lambda x) + D(\lambda)\sin(\lambda x)]\sin(\lambda ct)& \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\pi c\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} du\, g(u)\cos(\lambda(x-u))\sin(\lambda ct) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi c\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} du\, g(u)[\sin\lambda(x+ct-u) - \sin\lambda(x-ct-u)]\ .\end{aligned}$$

Zamjenom poretka integracije možemo izvrijedniti integral po λ

$$\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\pi\lambda}[\sin\lambda(x+ct-u) - \sin\lambda(x-ct-u)] = \frac{1}{2}[\mathrm{sgn}(x+ct-u) - \mathrm{sgn}(x-ct-u)]\ ,$$

pa sad možemo skupiti oba člana da napišemo **D'Alambertovo rješenje**

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(u)\,du\ .$$

Prepoznali smo da se drugi dio rješenja razlikuje od nule samo u intervalu $[x-ct, x+ct]$.

Područje u prošlosti o kojem ovisi funkcija u nekom (x_0, t_0) naziva se **domena ovisnosti**. Drugim rječima, s obzirom da su rubne granice D'Alambertovog rješenja $[x_0-ct_0, x_0+ct_0]$ područje u xt-ravnini o kojima ovisi rješenje definirano je

$$x - ct < x_0 - ct_0\,, \qquad x + ct < x_0 + ct_0\ , \tag{4.15}$$

što je prikazano na Slici 4.4. Obratno, događaj u (x_0, t_0) utječe na događaj u (x, t) samo ako se on nalazi u **domeni kauzalnosti**, koje je također opisano područjem (4.15).

Primjer 4.17. Polubeskonačna žica ima raspodjelu temperature u $t = 0$ danu s $u(x,0) = f(x) = u_0 e^{-bx^2}$, gdje je $b > 0$. Rub u $x = 0$ je izoliran. Pronađite raspodjelu temperature u kasnijim trenucima.

R. Toplinska jednadžba $u_t = a^2 u_{xx}$ rješava se separacijom varijabli $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\frac{1}{a^2}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = k \ ,$$

gdje smo uveli separacijsku konstantu k. Jedino fizikalno prihvatljivo rješenje je ono s $k = -q^2$. Tada

$$X(x) = A\cos(qx) + B\sin(qx)\,, \qquad T(t) = Ce^{-q^2a^2t} \ .$$

Izolirani rub u $x = 0$, odnosno $u_x(0,t) = 0$ nalaže $B = 0$. Početni uvjet zadovoljit ćemo superpozicijom

$$u(x,t) = \int_0^\infty A(q)e^{-q^2a^2t}\cos(qx)\,dq \ .$$

Koeficijente računamo po

$$A(q) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_0 e^{-bx^2}\cos(qx)\,dx = \frac{u_0}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-q^2/4b} \ ,$$

gdje integriramo i po $x < 0$, iako na tom dijelu nismo ništa definirali. Sam integral je Fourierov transformat Gaussijana kojeg smo izračunali u Primjeru xx. Na dalje,

$$u(x,t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi b}}\int_0^\infty e^{-q^2\left(a^2t+\frac{1}{4b}\right)}\cos(qx)\,dq = \frac{u_0}{\sqrt{4a^2bt+1}}\exp\left[-\frac{bx^2}{4a^2bt+1}\right] \ .$$

U prethodnom zadatku zanimljivo je primjetiti da iako nemamo gubitak energije (rub u $x = 0$ je izoliran, a ispada da isto vrijedi i za onaj u $x \to \infty$), stacionarno stanje sustava je $u(x,t) = 0$. Naime, kako je sustav beskonačan, ako čekamo dovoljno dugo, uvijek je moguće snižavati temperaturu odvođenjem topline sve dalje i dalje u $x \to \infty$

Nehomogeni sustavi

Primjer 4.18. Pronađite Greenovu funkciju za jedno-dimenzionalnu toplinsku jednadžbu.

R. Greenova funkcija $G(x-x', t-t')$ toplinske jednadžbe je njeno rješenje za jediničnu pobudu

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)G(x-x', t-t') = \delta(x-x')\delta(t-t') \ .$$

Problem rješavamo prelazeći u Fourier-transformirane varijable

$$G(x-x', t-t') = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}}e^{-iq(x-x')}e^{-i\omega(t-t')}g(q,\omega) \ .$$

Koristeći integralnu reprezentaciju δ-funkcije (3.21), linearna nezavisnost nalaže da Fourier transformat Greenove funkcije $g(q,\omega)$ zadovoljava

$$\frac{1}{2\pi}g(q,\omega)[-i\omega - a^2(-iq)^2] = \frac{1}{(2\pi)^2} \ .$$

Greenova funkcija je tada

$$G(x-x',t-t') = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq\, e^{-iq(x-x')} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega + ia^2q^2} \ .$$

Prvi integral izračunamo prelaskom u kompleksnu ω ravninu

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega + ia^2q^2} = -2\pi i \mathrm{Res}(-ia^2q^2) = -2\pi i e^{-a^2q^2(t-t')} \ ,$$

gdje smo krivulju po realnoj osi zatvorili s gornjom polukružnicom, jer vrijedi $t-t' > 0$. Preostali integral

$$G(x-x',t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq\, e^{-iq(x-x')} e^{-a^2q^2(t-t')} \ ,$$

je Fourier transformat Gaussijana, vidi (3.16), pa je

$$G(x-x',t-t') = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-t')}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a^2(t-t')}\right] \ .$$

Primjer 4.19. Pronađite Greenovu funkciju za 1D valnu jednadžbu. Koristite rubni uvjet da Greenova funkcija iščezava za sve $t' > t$. Da li je dobivena Greenova funkcija kauzalna?

R. Greenovu funkciju tražimo iz slijedeće jednadžbe

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(x-x',t-t') = \delta(x-x')\delta(t-t') \ ,$$

pomoću Fourierovog transformata

$$G(x-x',t-t') = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, g(k,\omega) e^{ik(x-x')} e^{-i\omega(t-t')} \ .$$

Uz integralnu reprezentaciju δ-funkcije, imamo Fourierov transformat $g(k,\omega)$

$$g(k,\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}} \ .$$

Rubni uvjet diktira da polove $g(k,\omega)$ valja pomaknuti na $\mathrm{Im}(\omega) < 0$. Slijedi

$$G(x-x',t-t') = \frac{c^2}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{e^{ikr - i\omega\tau}}{(\omega + i\epsilon)^2 - c^2k^2} \ , \tag{4.16}$$

gdje smo uveli pokrate $r = x - x'$, te $\tau = t - t'$. Integraciju po ω izvrijednjujemo u kompleksnoj ravnini. Za $\tau > 0$, integral je jednak

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega + i\epsilon)^2 - c^2k^2} = -2\pi i \left[\mathrm{Res}(\omega_+ - i\epsilon) + \mathrm{Res}(\omega_- - i\epsilon)\right] \ ,$$

gdje je $\omega_\pm = \pm ck$. Za $\tau < 0$ integral je jednak nuli. Reziduumi su

$$\mathrm{Res}(\omega_\pm - i\epsilon) = \pm \frac{e^{\mp ckt}}{2ck} \ .$$

Slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega + i\epsilon)^2 - c^2k^2} = -\frac{2\pi}{ck} \sin(ck\tau)\theta(\tau) \ .$$

Gornji izraz stavljamo u Greenovu funkciju (4.16)

$$\begin{aligned} G(x - x', t - t') &= -\frac{\theta(\tau)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sin(ck\tau)}{k} e^{ikr} \\ &= -\frac{\theta(\tau)}{2\pi} \frac{1}{2i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{i(r+c\tau)}}{k} - \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{i(r-c\tau)}}{k} \right] \ . \end{aligned} \tag{4.17}$$

Kako općenito vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iak}}{k} dk = i\pi \mathrm{sgn}(a) \ ,$$

za $a \in \mathbb{R}$, slijedi

$$G(x - x', t - t') = -\frac{\theta(\tau)}{4} [\mathrm{sgn}(r + c\tau) - \mathrm{sgn}(r - c\tau)] \ .$$

Za ispitati kauzalna svojstva, promatrajmo evoluciju događaja u $t' = 0$, $x' = 0$. Ako je x bilo koja točka unutar intervala $[-ct, ct]$ tada vrijedi $G(x, t) = -1/2$. S druge strane, ako je x bilo koja točka van tog intervala imamo da je $G(x, t) = 0$. Drugim riječima, ako se u tx ravnini nalazimo izvan područja omeđenog pravcima $x = \pm ct$ tada je Greenova funkcija nula.

Primjer 4.20. Pronađite Greenovu funkciju za 3D valnu jednadžbu.

R. Greenovu funkciju tražimo iz slijedeće jednadžbe

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t') \ ,$$

pomoću Fourierovog transformata

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, g(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-i\omega(t-t')} \ .$$

Uz integralnu reprezentaciju δ-funkcije, imamo da Fourierov transformat $g(\mathbf{k}, \omega)$ mora zadovoljavati

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \left[i^2k^2 - \frac{1}{c^2}(-i\omega)^2 \right] g(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \ ,$$

gdje smo označili $k = |\mathbf{k}|$. Rubni uvjet: Greenova funkcija mora iščezavati svugdje za $t < t'$ (kauzalnost). Slijedi da se polovi $\omega_\pm = \pm ck$ pomiču ispod realne osi $\omega_\pm \to \omega_\pm - i\epsilon$, gdje je $\epsilon > 0$ infinitezimalan. Slijedi

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \frac{c^2}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega\tau}}{(\omega + i\epsilon)^2 - c^2k^2} \ ,$$

gdje smo uveli pokrate $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, te $\tau = t - t'$. Integraciju po ω izvrijednjujemo u kompleksnoj ravnini. Za $\tau > 0$, integral je jednak

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega + i\epsilon)^2 - c^2k^2} = -2\pi i \left[\mathrm{Res}(\omega_+ - i\epsilon) + \mathrm{Res}(\omega_- - i\epsilon) \right] \ ,$$

dok je za $\tau < 0$ jednak nuli. Reziduumi su

$$\mathrm{Res}(\omega_\pm - i\epsilon) = \pm \frac{e^{\mp ckt}}{2ck} \ .$$

Slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega + i\epsilon)^2 - c^2k^2} = -\frac{2\pi}{ck} \sin(ck\tau) \ .$$

Greenova funkcija sadrži još dva netrivijalna integrala. U sfernim koordinatama

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') &= -\frac{2\pi c}{(2\pi)^4} \int d^3k \, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{\sin(ck\tau)}{k} \\ &= -\frac{c}{(2\pi)^2} \int_0^\infty k \, dk \sin(ck\tau) \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta e^{ikr\cos\theta} \\ &= -\frac{2c}{(2\pi)^2 R} \int_0^\infty dk \, \sin(kR)\sin(ck\tau) \ , \end{aligned}$$

gdje smo integracijsku os k_z usmjerili prema $\mathbf{r}$, te pripadni integral odmah i izvrijednili. Također $|\mathbf{r}| = r$. Na dalje

$$\begin{aligned} 2\int_0^\infty dk \, \sin(kr)\sin(ck\tau) &= \int_{-\infty}^\infty \left[e^{i(r+c\tau)k} + e^{-i(r+c\tau)k} - e^{i(r-c\tau)k} - e^{-i(r-c\tau)k} \right] \\ &= 4\pi \ [\delta(r + c\tau) - \delta(r - c\tau)] \ . \end{aligned}$$

Argument prve δ-funkcije je uvijek veći od nule. Stoga ona nikada ne doprinosi partikularnom rješenju, i možemo je odbaciti. Slijedi

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right) \ ,$$

gdje je vraćena puna notacija.

Poznavajući Greenove funkcije, moguće je rješiti nehomogenu PDJ. Npr. valna jednadžba za elektromagnetski potencijal $\phi(\mathbf{x}, t)$ u Gaussovim jedinicama, te Lorentzovom baždarenju glasi

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right) \phi(\mathbf{x}, t) = -4\pi\rho(\mathbf{x}, t) \ ,$$

gdje je $\rho(\mathbf{x}, t)$ gustoća naboja. Partikularno rješenje je dano s

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -4\pi \int d^3x' \int_{-\infty}^\infty dt' G(\mathbf{x}-\mathbf{x}', t-t')\rho(\mathbf{x}', t') = \int d^3x' \frac{\rho\left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \ .$$

Specijalan slučaj ove jednadžbe je dan poznatim elektrostatskim izrazom u kojem je izvor statičan $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})$.

4.5 ♣ ZADACI

1. Pokažite da je stacionarna raspodjela temperature u beskonačnoj traci metala (omeđenoj pravcima $y = 0$ i $y = a$, gdje je $a > 0$) kojoj donji rub držimo na temperaturi 0, a gornji rub na temperaturi zadanoj funkcijom $f(x)$ dana s

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du f(u) \int_0^{\infty} d\lambda \, \frac{\mathrm{sh}(\lambda y)}{\mathrm{sh}(\lambda a)} \, \cos(\lambda(u-x)) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} du \, \frac{f(u)}{\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \mathrm{ch}\,\left(\frac{\pi}{a}(u-x)\right)} \; . \end{aligned}$$

2. Beskonačna ploča je položena u prvi kvadrant $(x > 0, y > 0)$ Kartezijevog koordinatnog sustava. Dok jedan rub $(x = 0)$ održavamo na temperaturi $T = 0$, drugi rub $(y = 0)$ održavamo na temperaturi zadanoj funkcijom $f(x)$. Pokažite da je temperatura u bilo kojoj točki ploče dana s

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} y f(v) \left(\frac{1}{(v-x)^2 + y^2} - \frac{1}{(v+x)^2 + y^2} \right) dv \; .$$

Poglavlje 5

Specijalne funkcije

Neka rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda nalazimo u mnoštvu matematičkih i fizikalnih problema. Svojstva tih rješenja su poznata u detalje. Zbog obilatog korištenja nazivamo ih **specijalnim funkcijama**.

Diferencijalne jednadžbe za specijalne funkcije spadaju u generalnu klasu tzv. **Sturm-Liouvilleovog problema**. Jedna od iznimno važnih posljedica je da rješenja Sturm-Liouvilleovog problema čine potpun, ortogonalan skup, što ima za posljedicu da se općenita funkcija može napisati kao razvoj preko specijalnih funkcija, upravo analogno Fourierovom razvoju gdje se općenita funkcija razvijala preko trigonometrijskih funkcija.

Od čitavog mnoštva specijalnih funkcija koje se koriste u fizici, u ovom poglavlju upoznajemo samo one s kojima se najčešće susrećemo: to su Legendreovi polinomi, Besselove funkcije te kugline funkcije.

§ 5.1 Legendreovi polinomi

Legendreova diferencijalna jednadžba dana je kao

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + l(l+1)y(x) = 0 \ , \tag{5.1}$$

gdje je $l \in \mathbb{N}_0$ parametar diferencijalne jednadžbe, pa time i samih rješenja. Općenito rješenje je

$$y(x) = AP_l(x) + BQ_l(x) \ ,$$

gdje su $P_l(x)$ **Legendreovi polinomi**, a $Q_l(x)$ **Legendreove funkcije druge vrste**.

Legendreovu diferencijalnu jednadžbu susrećemo pri raspisu Laplaceove jednadžbe u sfernim koordinatama.

Neka svojstva Legendreovih polinoma

(i) Legendreovi polinomi mogu se generirati pomoću **Rodriguesove formule**

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \ . \tag{5.2}$$

Neke posljedice: $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$, $P_l(1) = 1$.

(ii) Funkcija izvodnica

$$g(r,t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2rt + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x) \, , r < 1 \ . \tag{5.3}$$

(iii) Neke važne rekurzije ($l > 0$)

$$P_{l+1}(x) = \frac{2l+1}{l+1} \, x P_l(x) - \frac{l}{l+1} \, P_{l-1}(x) \ , \tag{5.4}$$

$$Q_{l+1}(x) = \frac{2l+1}{l+1} \, x Q_l(x) - \frac{l}{l+1} \, Q_{l-1}(x) \ , \tag{5.5}$$

$$P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1) P_l(x) \ . \tag{5.6}$$

Neke posljedice:

$$P_{2l+1}(0) = 0 \, , \qquad P_{2l}(0) = (-1)^l \, \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} \ , \tag{5.7}$$

gdje zadnja relacija vrijedi za $l > 0$.

(iv) Ortogonalnost

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \, \delta_{lm} \tag{5.8}$$

Općenitu funkciju možemo razviti u red preko Legendreovih polinoma

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) \, , \qquad A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} P_l(x) f(x) \, dx \ . \tag{5.9}$$

Nekoliko prvih Legendreovih polinoma, i Legendreovih funkcija 2. vrste.

$$P_0(x) = 1 \ , \quad P_1(x) = x \ , \quad P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \ . \tag{5.10}$$

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \, , \qquad Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - 1 \ . \tag{5.11}$$

Primjer 5.1. Razvijte funkciju $f(x) = 2x + x^2 + 3x^3$ u red Legendreovih polinoma!

R. Rješiti ćemo zadatak na način da koristimo relacije ortogonalnosti (5.8). S obzirom na to da je indeks l ujedno i red Legendreovog polinoma, imamo da je

$$f(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x) + a_3P_3(x) \ .$$

Koeficijenti a_n su dani rješavanjem slijedećeg integrala

$$a_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)\,dx \ .$$

Imamo redom

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_0(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(2x + x^2 + 3x^3)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \ ,$$

$$a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_1(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x(2x + x^2 + 3x^3)\,dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{38}{15} = \frac{19}{5} \ ,$$

$$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_2(x)\,dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(3x^2-1)(2x + x^2 + 3x^3)\,dx = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{15} = \frac{2}{3} \ ,$$

$$a_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_3(x)\,dx = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x(5x^2-3)(2x + x^2 + 3x^3)\,dx = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{35} = \frac{6}{5} \ .$$

Konačan izraz za razvoj $f(x)$ u red Legendreovih polinoma je

$$f(x) = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{19}{5}P_1(x) + \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{6}{5}P_3(x) \ .$$

Primjer 5.2. Poznavajući prvo rješenje Legendreove diferencijalne jednadžbe pronađite njeno drugo rješenje $Q_0(x)$.

R. Koristimo jednadžbu (2.8)

$$u_2(x) = u_1(x)\int^x \exp\left[-\int^s P(u)du\right]\frac{ds}{[u_1(s)]^2} \ ,$$

gdje je $u_1(x)$ prvo rješenje a $P(x) = -2x/(1-x^2)$. Ako stavimo $u_1(x) = P_0(x) = 1$ imamo

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int^x \exp\left[\int^s \frac{2u}{1-u^2}\,du\right]ds = \int^x \exp(-\ln(1-s^2))\,ds \\ &= \int^x \frac{ds}{1-s^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ . \end{aligned}$$

Primjer 5.3. Pronađite rješenje Laplaceove jednadžbe $\nabla^2 u = 0$ unutar kugle polumjera a ako rješenje $u(r,\theta,\phi)$ na rubu zadovoljava Dirichletov rubni uvjet dan s

$$u(a,\theta,\phi) = f(\theta) \ .$$

R. Rješavamo Laplaceovu jednadžbu u sfernim koordinatama

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 \ .$$

Kako rubni uvjeti ne ovise o kutu ϕ, pretpostavljamo da isto vrijedi i za samo rješenje, tj. $u = u(r,\theta)$. Tada posljednji komad u gornjem izrazu otpada. Koristeći metodu separacije varijabli $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ imamo

$$\frac{(r^2R')'}{R} = -\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta\sin\theta} = -\lambda^2 \ ,$$

gdje je λ separacijska konstanta. Dobili smo sustav dviju običnih diferencijalnih jednadžbi

$$r^2R'' + 2rR' + \lambda^2 R = 0 \ ,$$
$$(\sin\theta\Theta')' - \lambda^2\sin\theta\Theta = 0 \ .$$

Radijalni dio predstavlja Eulerovu jednadžbu čije je rješenje

$$R(r) = Ar^p + Br^{-p} \ , \qquad p = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2} \ .$$

Uz supstituciju $x = \cos\theta$, kutni dio daje

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} - \lambda^2\Theta = 0 \ ,$$

što je upravo Legendreova diferecijalna jednadžba (5.1), u slučaju kada je $\lambda^2 = -l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}_0$. Rješenje kutnog dijela je

$$\Theta(\theta) = CP_l(\cos\theta) + DQ_l(\cos\theta) \ .$$

Uz dani λ, za radijalni dio imamo

$$R(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)} \ .$$

Kako $Q_l(\cos\theta)$ divergira za $\theta = 0, \pi$ te $r^{-(l+1)}$ divergira za $r = 0$, zahtijevamo $D = 0$, te $B = 0$, respektivno. Ukupno rješenje u području $r < a$ je stoga

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \ .$$

Na rubu $r = a$ imamo

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos\theta) \ ,$$

pa su, korištenjem relacija ortogonalnosti za Legendreove polinome (5.8), koeficijenti A_l dani s

$$A_l = \frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_l(\cos\theta)\,d\theta \ .$$

Primjer 5.4. Temperatura na konveksnoj površini uniformne hemisfere polumjera a je u_0, a njena baza je na temperaturi nula. Pronađi stacionarnu raspodjelu temperature unutar hemisfere.

R. Kao i u prethodnom primjeru rješavamo Laplaceovu jednadžbu u sfernim koordinatama. Zbog aksijalne simetrije rubnog uvjeta rješenje ne ovisi o kutu ϕ, općenito rješenje je $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, gdje smo odmah zapisali i separaciju varijabli.

Rješenje kutnog dijela je

$$\Theta(\theta) = CP_l(\cos\theta) + DQ_l(\cos\theta) \ .$$

Uz dani λ, za radijalni dio imamo

$$R(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)} \ .$$

Kako Q_l divergira za $\theta = 0$, te $r^{-(l+1)}$ divergira za $r = 0$, zahtijevamo $D = 0$, te $B = 0$, respektivno. Ukupno rješenje je

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \ .$$

Na rubu $r = a$, imamo

$$u(a,\theta) = u_0 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos\theta) \ .$$

Za $l > 0$, koeficijente A_l određujemo tako da pomnožimo cijeli izraz s nekim $P_m(\cos\theta)$, te integriramo $\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta$. Korištenjem relacija ortogonalnosti, te parnosti Legendreovih polinoma, imamo

$$\int_0^1 P_l(x)P_m(x)dx = \frac{\delta_{lm}}{2m+1} \ ,$$

odnosno

$$A_m = \frac{2m+1}{a^m}\, u_0 \int_0^1 dx\, P_m(x) \ ,$$

gdje smo koristili supstituciju $x = \cos\theta$. Potrebni integral je

$$\int_0^1 dx P_m(x) = \int_0^1 dx \frac{P'_{m+1}(x) - P'_{m-1}}{2m+1} = -\frac{1}{2m+1}[P_{m+1}(0) - P_{m-1}(0)] \ ,$$

gdje smo koristili svojstvo (5.6), kao i činjenicu da je $P_m(1) = 1$, respektivno. Slijedi

$$A_m = -\frac{u_0}{a^m}[P_{m+1}(0) - P_{m-1}(0)] \ .$$

Pogledajmo zasebno parne i neparne koeficijente $m = 2k$ te $m = 2k+1$

$$A_{2k} = -\frac{u_0}{2a^{2k}}[P_{2k+1}(0) - P_{2k-1}(0)] = 0 \ ,$$

zbog prve jednakosti u (5.7). S druge strane, koristeći drugu jednakost, imamo

$$A_{2k+1} = \frac{u_0}{a^{2k+1}} \frac{(-1)^k(4k+3)}{2k+2} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \ .$$

Specijalno, za $k = 0$ imamo $A_1 = 3u_0/2a$.

Ukupno rješenje je

$$u(r,\theta) = A_0 + A_1 r P_1(\cos\theta) + \sum_{l=1}^{\infty} A_{2l+1} r^{2l+1} P_{2l+1}(\cos\theta) \ .$$

S obzirom na to da je $P_{2l+1}(0) = 0$, rubni uvjet $u(r,\pi/2)$ je zadovoljen s $A_0 = 0$. Uvrštavanjem dobivenih koeficijenata imamo

$$u(r,\theta) = \frac{3u_0}{2}\frac{r}{a}P_1(\cos\theta) + u_0 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \frac{r^{2l+1}}{a^{2l+1}} P_{2l+1}(\cos\theta) \ .$$

Primjer 5.5. Pronađi stacionarnu raspodjelu temperature između dvije koncentrične sfere polumjera a i $2a$. Manja sfera je na temperaturi u_0, a veća na temperaturi $u_1(1+\sin^2\theta)$.

R. Rješavamo Laplaceovu jednadžbu $\nabla^2 u = 0$ u sfernim koordinatama. Rubni uvjeti

$$u(a,\theta) = u_0\,, \qquad u(2a,\theta) = u_1(1+\sin^2\theta)\ .$$

Kako rubni uvjeti ne ovise o θ pretpostavljamo da isto vrijedi i za općenito rješenje. U tom slučaju, znamo iz prethodnog zadatka da rješenja u kutnom smjeru Legendreovi polinomi. Pridružene Legendreove funkcije divergiraju za $\theta = 0, \pi$. S druge strane, kako nas zanima područje $a < r < 2a$, u radijalnom smjeru sad imamo i pozitivne i negativne potencije. Stoga za općenito rješenje pišemo

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos\theta)\ .$$

Primjena prvog rubnog uvjeta

$$u(a,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l a^l + B_l a^{-(l+1)} \right) P_l(\cos\theta) = 0\ ,$$

nakon množenja s $P_m(\cos\theta)$ te integriranja po $\int_0^\pi d\theta\,\cos\theta$ vodi na

$$\frac{1}{2m+1}\left(A_m a^m + \frac{B_m}{a^{m+1}} \right) = u_0 \delta_{m0}\ ,$$

pri čemu je korištena relacija ortogonalnosti (5.8). Sličnim postupkom za drugi rubni uvjet dolazimo do

$$\frac{2}{2m+1}\left[A_m (2a)^m + \frac{B_m}{(2a)^{m+1}} \right] = \int_0^\pi P_m(\cos) u(2a,\theta)\ ,$$

gdje smo na desnoj strani koristili supstituciju $x = \cos\theta$. Rubni uvjet se može prikladno napisati preko Legendreovih polinoma

$$u(2a,\theta) = u_1 \left(\frac{5}{3} P_0(\cos\theta) - \frac{2}{3} P_2(\cos\theta) \right)\ .$$

Sad možemo izračunati integral

$$\int_0^\pi P_m(\cos) u(2a,\theta) = \frac{5}{3} u_1 \frac{2}{2m+1}\delta_{m0} - \frac{2}{3} u_1 \frac{2}{2m+1}\delta_{m2} = 2u_1 \left(\frac{5}{3}\delta_{m0} - \frac{2}{15}\delta_{m2} \right)\ .$$

Za $m = 0$ oba rubna uvjeta daju

$$A_0 + \frac{B_0}{a} = u_0\,, \qquad A_0 + \frac{B_0}{2a} = \frac{5u_1}{3}\ ,$$

što daje

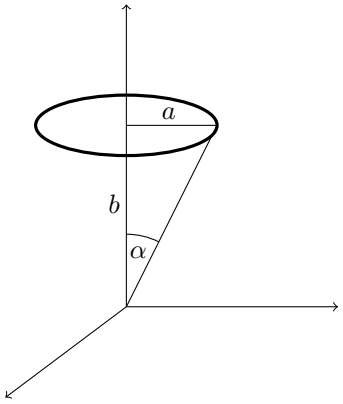
$$A_0 = -u_0 + \frac{10u_1}{3}\,, \qquad B_0 = 2a\left(u_0 - \frac{5u_1}{3} \right)\ .$$

Za $m = 2$ imamo

$$A_2 a^2 + \frac{B_2}{a^3} = 0\,, \qquad A_2 (2a)^2 + \frac{B_2}{(2a)^3} = -\frac{2u_1}{3}\ .$$

Slijedi

$$A_2 = -\frac{16u_1}{93}\frac{1}{a^2}\,, \qquad B_2 = \frac{16u_1}{93} a^3\ .$$



Slika 5.1: Prsten homogene raspodjele naboja Q.

U svim ostalim slučajevima A_m i B_m iščezavaju, pa je ukupno rješenje

$$u(r,\theta) = \Big[-u_0 + \frac{10u_1}{3} + 2\left(u_0 - \frac{5u_1}{3}\right)\frac{a}{r}\Big] P_0(\cos\theta) + \frac{16u_1}{93}\left(-\frac{r^2}{a^2} + \frac{a^3}{r^3}\right) P_2(\cos\theta) \ .$$

Primjer 5.6. Pronađite potencijal na z-osi jednoliko nabijenog prstena polumjera a koji se nalazi na udaljenosti b iznad ishodišta. Naboj prstena je $Q > 0$.

R. Rješavamo Poissonovu jednadžbu

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \ ,$$

gdje je

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2\pi a}\delta(r-a)\delta(z-b) \ ,$$

vidi jednadžbu (3.39).

Problem ćemo rješiti tehnikom Greenove funkcije Greenova funkcija za Laplaceov operator u 3D

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -4\pi\delta(mathbf{r}-\mathbf{r}') \ ,$$

glasi

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \ ,$$

vidi primjer xx. Tada

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \ .$$

U polarnim koordinatama imamo

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2} = \sqrt{\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'} = \sqrt{z^2 + z'^2 + r'^2 - 2\sqrt{z'^2+r'^2}z\cos\alpha} \ ,$$

gdje smo s α označili kut između $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$, vidi sliku 5.1. Slijedi

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\infty} r'dr' \frac{\frac{Q}{2\pi a}\delta(r'-a)\delta(z'-b)}{(z^2+z'^2+r'^2-2\sqrt{z'^2+r'^2}z\cos\alpha)^{1/2}} \ .$$

Nakon trivijalne integracije dobijemo

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{(z^2 + c^2 - 2zc\cos\alpha)^{1/2}} \ ,$$

gdje je $c^2 = a^2 + b^2$ a kut se može izračunati iz $\mathrm{tg}\alpha = a/b$. Ovaj izraz možemo i razviti u red Legendreovih polinoma. Ako je $r < c$, izraz za funkciju izvodnicu (5.3) nam daje

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{c}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{c}\right)^l P_l(\cos\alpha) \ , \tag{5.12}$$

odnosno

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{c}{r}\right)^l P_l(\cos\alpha) \ , \tag{5.13}$$

ako je $r > c$.

Primjer 5.7. Pronađite potencijal jednoliko nabijenog prstena naboja Q u cijelom prostoru.

R. Postavimo prsten radi jednostavnosti u ishodište. Ideja je rješiti Laplaceovu jednadžbu s potencijalom (5.12), odnosno (5.13) kao rubnim uvjetom. Općenito rješenje Laplaceove jednadžbe u sfernim koordinatama je dano s

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)})P_l(\cos\theta) \ , \tag{5.14}$$

gdje smo uzeli u obzir simetriju s obzirom na z-os koja nam je omogućila da je potencijal neovisan o kutu ϕ. Također, s obzirom da je sama z-os dio prostora od interesa općenito rješenje nema Legendreove funkcije druge vrste. Ako stavimo $b = 0$ slijedi $\alpha = \pi/2$, pa je potencijal na z-osi dan kao (npr. na dijelu $\theta = 0$)

$$\Phi(r,0) = Q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^l}{a^{l+1}}P_l(0) \ ,$$

za $z < a$, odnosno

$$\Phi(r,0) = Q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^l}{z^{l+1}}P_l(0) \ ,$$

za $z > a$. S druge strane, na z-osi izraz (5.14) postaje

$$\Phi(r,0) = \sum_{l=0}^{\infty}(A_l z^l + B_l z^{-(l+1)}) \ ,$$

gdje smo iskoristili da je $P_l(1) = 1$. Usporedbom s gornjim izrazima vidimo da za $z < a$ vrijedi $B_l = 0$, te da je

$$A_l = Q\frac{P_l(0)}{a^{l+1}} \ ,$$

dok za $z > a$ vrijedi $A_l = 0$, odnosno

$$B_l = Qa^l P_l(0) \ .$$

Ako uzmemo u obzir (5.7) možemo napisati konačno rješenje kao

$$\Phi(r,\theta) = \frac{Q}{a} + Q\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l-1)!!}{(2l)!!}\frac{r^{2l}}{a^{2l+1}}P_l(\cos\theta) \, , \qquad r < a \ ,$$

$$\Phi(r,\theta) = \frac{Q}{r} + Q\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (2l-1)!!}{(2l)!!} \frac{a^{2l}}{r^{2l+1}} P_l(\cos\theta)\,, \qquad r > a\ .$$

5.1 ♣ ZADACI

1. Pronađite drugo rješenje $Q_1(x)$ Legendreove diferencijalne jednadžbe koristeći metodu iz primjera 5.1.
2. Razvijte funkciju $f(x) = x^2$ u red Legendreovih polinoma.
3. Pronađite stacionarnu temperaturu unutar kugle polumjera a ako se gornji dio hemisfere drži na $0°$ a donji na $100°$. Drugim rječima, raspodjela temperature $f(\theta)$ je dana s
$$f(\theta) = \begin{cases} 0°\,, & 0 < \theta < \pi/2 \\ 100°\,, & \pi/2 < \theta < \pi \end{cases}\ .$$
4. Rješite gornji zadatak ako je $f(\theta) = 2\cos^2\theta + 3$.
5. Pronađite elektrostatski potencijal između dviju koncentričnih sfera polumjera a i b $(b > a)$ na potencijalima V_a i V_b, respektivno.
6. Jedna trećina pune okrugle plutače polumjera 30 cm pluta na moru. Ako je temperatura zraka $50°$ a temperatura vode $25°$, pronađite raspodjelu temperature unutar plutače.

§ 5.2 Kugline funkcije

Rješenje **pridružene Legendreove diferencijalne jednadžbe**

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y(x) = 0\ , \tag{5.15}$$

čine **pridružene Legendreove funkcije**, gdje su $l \in \mathbb{N}_0$, te $m \in \mathbb{Z}$ uz $|m| \le l$. Općenito rješenje

$$y(x) = AP_l^m(x) + BQ_l^m(x)\ ,$$

gdje su $P_l^m(x)$ pridružene Legendreove funkcije 1. vrste, te $Q_l^m(x)$ pridružene Legendreove funkcije 2. vrste.

Eksplicitna forma rješenja može se dobiti poznavanjem P_l i Q_l, tako da

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l\ , \tag{5.16}$$

gdje je u drugom koraku korištena Rodriguesova formula. Potpuno analogna relacija vrijedi za $Q_l^m(x)$.

Svojstva pridruženih Legendreovih funkcija:

(i)

$$P_l^0(x) = P_l(x)\,, \qquad Q_l^0(x) = Q_l(x)\,, \qquad P_l^m(x) = 0\,, \quad \text{za} \quad m > l\ .$$

(ii)

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,P_l^m(x)\ .$$

(iii) Parnost

$$P_l^m(-x) = (-1)^{l+m} P_l^m(x)\ .$$

(iv) Vrijednost u $x = \pm 1$ za $m \neq 0$,

$$P_l^m(\pm 1) = 0 \quad \text{za} \quad m \neq 0\ .$$

(v) Rekurzije..

$$P_{l+1}^m(x) = \frac{2l+1}{l-m+1}\,xP_l^m(x) - \frac{l+m}{l-m+1}\,P_{l-1}^m(x)\ .$$

(vi) Ortogonalnost

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x)\,dx = \frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{ll'}\ . \tag{5.17}$$

Kugline funkcije definiramo kao

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \mathcal{N}_{lm} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}\ , \tag{5.18}$$

gdje normu odabiremo tako da vrijedi

$$\int d\Omega\, Y_{\ell m}^*(\theta,\phi)\, Y_{\ell' m'}(\theta,\phi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\ , \tag{5.19}$$

iz čega slijedi

$$\mathcal{N}_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\ . \tag{5.20}$$

Korišten je zapis

$$\int d\Omega = \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\ .$$

Vrijedi

$$Y_{\ell,-m} = (-1)^m Y_{\ell m}^*\ .$$

Primjer 5.8. Pronađite radijalne vibracije sferne membrane polumjera a, koja je ispuštena iz mirovanja, te u početku definirana funkcijom $f(\theta,\phi)$.

R. Krećemo od valne jednadžbe u sfernim koordinatama

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ .$$

Funkcija u predstavlja elongaciju membrane od ravnotežnog položaja. Kako nas zanimaju radijalne vibracije tražimo rješenje za fiksni $r = a$, prvi član u gornjem raspisu Laplasijana otpada. Separacija varijabli $u(\theta,\phi,t) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)T(t)$ vodi na

$$\mathrm{ctg}\theta\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi} = \frac{a^2}{c^2}\frac{\ddot{T}}{T} = -k^2 \ ,$$

gdje smo uveli separacijsku konstantu k. Tada

$$T(t) = A\cos\left(\frac{ckt}{a}\right) + B\sin\left(\frac{ckt}{a}\right) \ .$$

Manipulacija lijeve strane prethodne jednadžbe nam omogućava da uvedemo drugu separacijsku konstantu

$$\left(\mathrm{ctg}\theta\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{\Theta''}{\Theta}\right)\sin^2\theta + k^2\sin^2\theta = -\frac{\Phi''}{\Phi} = m^2 \ .$$

Tada

$$\Phi(\phi) = C\cos(m\phi) + D\sin(m\phi) \ ,$$

gdje konszistentnost $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ nalaže $m \in \mathbb{Z}$. Preostaje još slijedeća diferencijalna jednadžba

$$\Theta'' + \mathrm{ctg}\theta\Theta' + \left(k^2 - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0 \ .$$

Uvođenjem supstitucije $x = \cos\theta$

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left(k^2 - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta = 0 \ ,$$

dobili smo upravo pridruženu Legendreovu diferencijalnu jednadžbu (5.15). U tom slučaju rješenja postoje jedino ako je $k = l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}_0$, te $|m| \leq l$. Kako pridružene Legendreove funkcije 2. vrste divergiraju u rubnim točkama, rješenje u θ-smjeru je

$$\Theta(\theta) = FP_l^m(\cos\theta) \ .$$

Rubni uvjet $u_t(\theta,\phi,0) = 0$ daje $B = 0$, pa je ukupno rješenje

$$u(\theta,\phi,t) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{ml}\cos(m\phi) + B_{ml}\sin(m\phi)\right]P_l^m(\cos\theta)\cos(\omega_l t) \ ,$$

gdje je $\omega_l = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{a}\,c$. Koeficijenti se mogu pronaći korištenjem relacije ortogonalnosti za trigonometrijske funkcije, kao i one za pridružene Legendreove funkcije (5.17), rezultat je

$$A_{ml} = \frac{2l+1}{2\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int d\Omega\cos(m\phi)P_l^m(\cos\theta)f(\theta,\phi) \ , \tag{5.21}$$

$$B_{ml} = \frac{2l+1}{2\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int d\Omega\sin(m\phi)P_l^m(\cos\theta)f(\theta,\phi) \ . \tag{5.22}$$

Primjer 5.9. Površina sfere jediničnog polumjera drži se na potencijalu

$$v_0 \sin^2\theta \cos(2\phi)$$

. Odredi potencijal unutar i izvan sfere.

R. Tražimo rješenje Laplaceove diferencijalne jednadžbe u sfernim koordinatama

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 \ .$$

Separacijom varijabli $u(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ u kutnom dijelu dobivamo isto što i u prošlom zadatku,

$$\Phi(\phi) = A\cos(m\phi) + B\sin(m\phi) \ ,$$
$$\Theta(\theta) = CP_l^m(\cos\theta) + DQ_l^m(\cos\theta) \ ,$$

dok je diferencijalna jednadžba u radijalnom dijelu

$$r^2R'' + 2rR' + l(l+1)R = 0 \ .$$

Rješenja su

$$R(r) = Fr^l + Gr^{-(l+1)} \ .$$

Regularnost u $\theta = 0, \pi$ nalaže $D = 0$. U području $0 < r < 1$ moramo zahtijevati $G = 0$, pa je općenito rješenje u tom području

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}\cos(m\phi) + B_{lm}\sin(m\phi)\right] r^l\, P_l^m(\cos\theta) \ .$$

Rubni uvjet je pogodno zapisati u slijedećem obliku

$$u(1,\theta,\phi) = v_0\ \sin^2\theta\ \cos(2\phi) = v_0\frac{1}{3}P_2^2(\cos\theta)\cos(2\phi) \ .$$

Uvrštavanjem eksplicitne forme rješenja dobivamo formule za koeficijente od kojih je samo A_{22} neiščezavajući, i iznosi $A_{22} = v_0/3$. Dakle za $r < 1$ imamo

$$u(r,\theta,\phi) = \frac{v_0}{3}r^2P_2^2(\cos\theta)\cos(2\phi) = v_0r^2\sin^2\theta\cos(2\phi) \ .$$

Ako ponovimo isti postupak u području $r > 1$, dobivamo da regularnost u $r \to \infty$ zahtijeva da u radijalnom smjeru postoje samo negativne potencije, te da je jedini neiščezavajući koeficijent $A_33 = v_0/3$. Slijedi

$$u(r,\theta,\phi) = \frac{v_0}{3}\frac{1}{r^3}P_3^3(\cos\theta)\cos(2\phi) = \frac{v_0}{r^3}\sin^2\theta\cos(2\phi) \ .$$

5.2 ♣ ZADACI

1. Prikažite eksplicitnim računom normiranje kuglinih funkcija $Y_{lm}(\theta,\phi)$ za maksimalni pozitivni m u slučajevima $l = 3$, $l = 4$ i $l = 5$.
2. Eksplicitnim računom pokažite da vrijedi

$$\sum_{m=-l}^{l}|Y_{lm}(\theta,\phi)| = \frac{2l+1}{4\pi} \ ,$$

za $l = 0, 1, 2$.

§ 5.3 Besselove funkcije

Rješenja diferencijalne jednadžbe

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \mu^2)y(x) = 0 \ , \tag{5.23}$$

nazivaju se **Besselove funkcije**.

Označimo prvo rješenje s $J_\mu(x)$, koje se još naziva Besselova funkcija 1. vrste. Ovisno o karakteru konstante μ za drugo rješenje imamo slijedeću situaciju.

i) Ako je $\mu \notin \mathbb{Z}$ tada je $J_{-\mu}(x)$ linearno nezavisna funkcija od $J_\mu(x)$, pa je ukupno rješenje
$$y(x) = C_1 J_\mu(x) + C_2 J_{-\mu}(x) \ .$$

ii) Ako je $\mu = m \in \mathbb{Z}$, tada je $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ linearno zavisno rješenje. Ukupno rješenje je
$$y(x) = C_1 J_m(x) + C_2 N_m(x) \ ,$$
gdje je $N_m(x)$ **Neumannova funkcija**, ili Besselova funkcija 2. vrste te glasi
$$N_m(x) = \lim_{\mu \to m} \frac{J_\mu(x)\cos(\pi\mu) - J_{-\mu}(x)}{\sin(\pi\mu)} \ .$$
Kao alternativni zapis, ponekad se koriste **Hankelove funkcije**
$$H_m^{(1,2)}(x) = J_m(x) \pm iN_m(x) \ .$$

iii) Ako je $\mu^2 = n(n+1)$ onda su rješenja **sferne Besselove funkcije**
$$y(x) = C_1 j_n(x) + C_2 n_n(x) \ ,$$
gdje su
$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \qquad n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-\frac{1}{2}}(x) \, .$$

Rješenja diferencijalne jednadžbe

$$x^2y''(x) + xy'(x) - (x^2 + \mu^2)y(x) = 0 \ ,$$

čine **modificirane Besselove funkcije**

$$y(x) = C_1 I_\mu(x) + C_2 K_\mu(x) \ ,$$

koje su na slijedeći način vezane na Besselove funkcije

$$I_\mu(x) = i^{-\mu} J_\mu(ix) \, , \qquad K_\mu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\mu+1} H_\mu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\mu}(x) - I_\mu(x)}{\sin(\mu\pi)} \ .$$

Besselova funkcija $J_\mu(x)$ može se dobiti Frobeniusovom metodom. Eksplicitna forma kao razvoj u red dana je s

$$J_\mu(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{\mu+2p}}{p!\Gamma(\mu + p + 1)2^{\mu+2p}} \ . \tag{5.24}$$

Ponekad je korisna i integralna reprezentacija

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\tau\, \cos(m\tau - x\sin\tau)\ . \tag{5.25}$$

Neka svojstva Besselovih funkcija

Navesti ćemo neka korisna svojstva Besseleovih funkcija u slučaju kada je $\mu = m \in \mathbb{Z}$.

(i) Dok je Besselova funkcija regularna u ishodištu $J_0(0) = 1$, te $J_m(0) = 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$, Neumannova funkcija divergira $\lim_{x\to 0} N_m(x) \to -\infty$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

(ii) Asimptotsko ponašanje ($x \gg \left|n^2 - \frac{1}{4}\right|$)

$$J_m(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right)\ , \tag{5.26}$$

$$N_m(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right)\ . \tag{5.27}$$

(iii) Deriviranje, odnosno integriranje Besselovih funkcija

$$\frac{d}{dx}[x^m J_m(x)] = x^m J_{m-1}(x)\,, \qquad \frac{d}{dx}[x^{-m} J_m(x)] = -x^{-m} J_{m+1}(x)\ . \tag{5.28}$$

Korisna posljedica gornje relacije

$$J'_m(x) = \frac{1}{2}[J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)] \tag{5.29}$$

(iv) Rekurzija

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x}J_m(x)\ . \tag{5.30}$$

(v) Ortogonalnost

$$\int_0^1 dx\, x\, J_m(\lambda_r^{(m)}x)J_m(\lambda_s^{(m)}x) = \frac{1}{2}\delta_{rs}J^2_{m+1}(\lambda_r^{(m)})\ , \tag{5.31}$$

gdje su $\lambda_r^{(m)}$ nultočke Besselove funkcije $J_m(x)$.

(vi) Wronskijan rješenja

$$J_\mu(x)J'_{-\mu}(x) - J'_\mu(x)J_{-\mu}(x) = -\frac{2\sin(\mu\pi)}{\pi x}\ , \tag{5.32}$$

$$J_m(x)N'_m(x) - J'_m(x)N_m(x) = \frac{2}{\pi x}\ . \tag{5.33}$$

Općenitu funkciju možemo razviti u red preko neke Besselove funkcije J_m

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_m(\lambda_p^{(m)} x) \ , \tag{5.34}$$

gdje su $\lambda_p^{(m)}$ pozitivne nultočke $J_m(x)$. Koeficijenti A_m se dobiju koristeći (5.31)

$$A_p = \frac{2}{J_{m+1}^2(\lambda_p^{(m)})} \int_0^1 x J_m(\lambda_p^{(m)} x) f(x)\, dx \ . \tag{5.35}$$

Sferne Besselove funkcije mogu se zapisati u zatvorenoj formi, tako npr.

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \, , \qquad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x} \ .$$

Primjer 5.10. Razvijte funkciju $f(x) = 1$ u red po Besselovoj funkciji $m = 0, 1, 2$.

R. Za $f(x) = 1$, iz formule za koeficijente (5.35) treba rješiti slijedeći integral

$$\int_0^1 x J_m(\lambda_p^{(m)}) dx = \frac{1}{(\lambda_p^{(m)})^2} \int_0^{\lambda_p^{(m)}} t J_m(t) dt \ .$$

Za $m = 0$ imamo

$$\int_0^{\lambda_p^{(0)}} t J_0(t)\, dt = t J_1(t)|_0^{\lambda_p^{(0)}} = \lambda_p^{(0)} J_1(\lambda_p^{(0)}) \ ,$$

gdje smo koristili svojstvo (5.28). Tada

$$A_p = \frac{2}{J_1^2(\lambda_p^{(0)})} \frac{\lambda_p^{(0)} J_1(\lambda_p^{(0)})}{(\lambda_p^{(0)})^2} = \frac{1}{J_1(\lambda_p^{(0)})} \frac{2}{\lambda_p^{(0)}} \ .$$

Za $m = 1$, relevantni integral je

$$\int_0^{\lambda_p^{(1)}} t J_1(t)\, dt = -t J_0(t)|_0^{\lambda_p^{(1)}} + \int_0^{\lambda_p^{(1)}} J_0(t)\, dt = -\lambda_p^{(1)} J_0(\lambda_p^{(1)}) + \int_0^{\lambda_p^{(1)}} J_0(t)\, dt \ ,$$

gdje smo u prvom koraku koristili parcijalnu integraciju. Posljednji integral se ne može rješiti analitički, pa je koeficijent

$$A_p = \frac{2}{(\lambda_p^{(1)})^2 \, J_2^2(\lambda_p^{(1)})} \left[-\lambda_p^{(1)} J_0(\lambda_p^{(1)}) + \int_0^{\lambda_p^{(1)}} J_0(t)\, dt \right] \ .$$

Konačno za $m = 2$

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_p^{(2)}} t J_2(t)\, dt &= t^2 \left(-\frac{J_1(t)}{t} \right)_0^{\lambda_p^{(2)}} - \int_0^{\lambda_p^{(2)}} 2t \left(-\frac{J_1(t)}{t} \right) \\ &= -\lambda_p^{(2)} J_1(\lambda_p^{(2)}) - 2 \int_0^{\lambda_p^{(2)}} J_1(t)\, dt = 2 - 2J_0(\lambda_p^{(2)}) - \lambda_p^{(2)} J_1(\lambda_p^{(2)}) \ , \end{aligned}$$

gdje smo u prvom koraku koristili parcijalnu integraciju, a u posljednjem (5.28). Tada je

$$A_p = \frac{2}{(\lambda_p^{(2)})^2 \, J_3^2(\lambda_p^{(2)})} \left[2 - 2J_0(\lambda_p^{(2)}) - \lambda_p^{(2)} J_1(\lambda_p^{(2)}) \right] \ .$$

Primjer 5.11. Pronađite titranje kružne membrane polumjera a učvršćene na obodu. Početni uvjeti za elongaciju membrane $u(r,\phi,t)$ u cilindričnim koordinatama su dani preko općenitih funkcija

$$u(r,\phi,0) = f(r,\phi)\,, \qquad u_t(r,\phi,0) = g(r,\phi)\ .$$

R. Valna jednadžba u cilindričnim koordinatama dana je kao

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi} = \frac{1}{c^2}u_{tt}\ .$$

Koristeći metodu separacije varijabli $u(r,\phi,t) = R(r)\Phi(\phi)T(t)$ dolazimo do slijedećeg izraza

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}}{T} = -k^2\ ,$$

gdje smo uveli separacijsku konstantu k. Tada, vremenski dio rješenja postaje

$$T(t) = A_1\cos(\omega t) + B_1\sin(\omega t)\ ,$$

gdje je $\omega = ck$. Sad imamo

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + k^2r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda^2\ ,$$

gdje smo uveli novu separacijsku konstantu λ. Kutni dio rješenja je

$$\Phi(\phi) = C_1\cos(\lambda\phi) + D_1\sin(\lambda\phi)\ .$$

Uvjet konzistentnosti $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$ nalaže da je $\lambda = m \in \mathbb{Z}$. Preostaje radijalna jednadžba

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (k^2r^2 - m^2)R(r) = 0\ .$$

Uvođenjem bezdimenzionalne varijable $x = kr$ imamo $R(r) = R(x/k) = y(x)$

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - m^2)y(x) = 0\ ,$$

što prepoznajemo kao Besselovu diferencijalnu jednadžbu. Stoga

$$y(x) = F_1J_m(x) + G_1N_m(x)\ ,$$

odnosno

$$R(r) = F_1J_m(kr) + G_1N_m(kr)\ .$$

S obzirom na to da Neumannova funkcija divergira u ishodištu, regularnost rješenja specijalno i u toj točci nalaže $G_1 = 0$. Na dalje, rubni uvjet $u(a,\phi,t) = 0$ uvodi diskretizaciju separacijske varijable k: $J_m(ka) = 0$. Ako s $\alpha_m^{(s)}$ označimo s-tu nultočku m-te Besselove funkcije, imamo da je $k_{ms} = \alpha_m^{(s)}/a$. Ukupno rješenje je stoga dano s

$$u(r,\phi,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} J_m\left(\alpha_m^{(s)}\frac{r}{a}\right)\Big\{[A_{ms}\cos(\omega_{ms}t) + B_{ms}\sin(\omega_{ms}t)]\cos(m\phi) + [C_{ms}\cos(\omega_{ms}t) + D_{ms}\sin(\omega_{ms}t)]\sin(m\phi)\Big\}\ .$$

Početni uvjeti daju slijedeća ograničenja

$$u(r,\phi,0) = f(r,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\alpha_m^{(s)}}{a}r\right)[A_{ms}\cos(m\phi) + C_{ms}\sin(m\phi)]\ , \quad (5.36)$$

$$u_t(r,\phi,0) = g(r,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} J_m\left(\alpha_m^{(s)}\frac{r}{a}\right)\omega_{ms}\,[B_{ms}\cos(m\phi) + D_{ms}\sin(m\phi)]\ . \quad (5.37)$$

Iz ovih jednadžbi možemo odrediti nepoznate koeficijente, što ćemo i pokazati eksplicitno na jednom primjeru. Sume po indeksu m se lako riješimo projekcijom na pripadni Fourierov mod. Npr. ako (5.36) pomnožimo s $\cos(n\phi)$ i integriramo po $\int_0^{2\pi} d\phi$, slijedi

$$\int_0^{2\pi} f(r,\phi)\,\cos(n\phi)\,d\phi = \sum_{s=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\alpha_n^{(s)}}{a}r\right) A_{ns}\pi(1+\delta_{n0})\ .$$

U slijedećem koraku pomnožimo s $rJ_n\left(\frac{\alpha_n^{(p)}}{a}r\right)$, te integriramo po $\int_0^a\ rdr$

$$\int_0^{2\pi}\cos(n\phi)\,d\phi\int_0^a dr\,rJ_n\left(\frac{\alpha_n^{(p)}}{a}r\right)f(r,\phi)\sum_{s=1}^{\infty}A_{ns}\pi(1+\delta_{n0})$$
$$\times\int_0^a dr\,rJ_n\left(\frac{\alpha_n^{(s)}}{a}r\right)J_n\left(\frac{\alpha_n^{(p)}}{a}r\right)=A_{np}\pi\frac{a^2}{2}J_{n+1}^2(\alpha_n^{(p)})\ .$$

gdje smo koristili ortogonalnost Besselovih funkcija (5.31). Sada se posljednji izraz lako invertira

$$A_{np}=\frac{2}{\pi a^2}\frac{1}{(1+\delta_{n0})J_{n+1}^2(\alpha_n^{(p)})}\int_0^{2\pi}\cos(n\phi)\int_0^a r\,dr\,f(r,\phi)J_n\left(\frac{\alpha_n^{(p)}}{a}r\right)\ .$$

Preostale koeficijente dobijemo analogno.

Primjer 5.12. Pronađite transvenzalne vibracije lanca duljine L ako je početni položaj zadan funkcijom $f(x)$, a početna brzina definirana s $g(x)$.

R. Imamo sličnu situaciju kao kod niti čiji je jedan kraj slobodan (vidi sliku xx). S druge strane, bitna je razlika što lanac nije elastičan, pa napetost niti potječe od gravitacije. To znači da napetost u nekoj točci lanca x ovisi o tome kolika je masa lanca ispod te točke, drugim riječima $T(x)=\rho gx$, gdje je ρx efektivna masa dijela ispod točke x, a ρ gustoća lanca. Valna jednadžba se pritom modificira (vidi Primjer xx u slijedećem poglavlju)

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+T(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ .$$

Ako uvrstimo izraz za T, imamo

$$u_{tt}=g(u_x+xu_xx)\ .$$

Separacija varijabli $u(x,t)=X(x)T(t)$ vodi na

$$\frac{1}{T}\frac{\ddot{T}}{T}=\frac{X'}{X}+x\frac{X''}{X}=-\lambda^2\ ,$$

gdje smo uveli separacijsku konstantu λ.

Vremenski dio rješenja je

$$T(t)=A\cos(\sqrt{g}\lambda t)+B\sin(\sqrt{g}\lambda t)\ .$$

Za prostorni dio imamo slijedeću jednadžbu

$$xX''+X'+\lambda^2X=0\ . \tag{5.38}$$

Uz supstituciju $s=2\sqrt{x}$, imamo

$$X'(x)=\frac{dX}{dx}=\frac{2}{s}\frac{dX}{ds}\,,\qquad X''(x)=\frac{d^2X}{dx^2}=-\frac{4}{s^3}\frac{dX}{ds}+\frac{4}{s^2}\frac{d^2X}{ds^2}\ ,$$

pa jednadžba (5.38) postaje

$$s^2\frac{d^2X}{ds^2}+s\frac{dX}{ds}+\lambda^2s^2X(s)=0\ .$$

Uvođenjem $u=\lambda s$ konačno imamo

$$u^2\frac{d^2X}{du^2}+u\frac{dX}{du}+u^2X=0\ ,$$

što je Besselova diferencijalna jednadžba 0. reda, vidi (5.23). Rješenje u x-smjeru je

$$X(x)=CJ_0(2\lambda\sqrt{x})+DN_0(2\lambda\sqrt{x})\ .$$

Da bi rješenje bilo regularno u $x=0$ zahtijevamo $D=0$. Rubni uvjet $u(L,t)=0$ nalaže da separacijska konstanta poprima samo vrijednosti dane jednadžbom $J_0(2\lambda\sqrt{L})=0$. Ako s α_j označimo j-tu nultočku Besselove funkcije J_0, vrijedi $\lambda_j=\alpha_j/2\sqrt{L}$. Ukupno rješenje je

$$u(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\left[A_j\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\frac{\alpha_j}{2}t\right)+B_j\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\frac{\alpha_j}{2}t\right)\right]\ .$$

Koeficijenti se određuju pomoću relacije ortogonalnosti (5.31)

$$A_j=\frac{1}{LJ_1^2(\alpha_j)}\int_0^L f(x)J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\ ,$$

$$B_j=\frac{2}{\alpha_jJ_1^2(\alpha_j)}\frac{1}{\sqrt{gL}}\int_0^L f(x)J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\ ,$$

Teorem 5.1. Metoda stacionarne faze *za neku funkciju $f(t)$ na intervalu $[a,b]$ daje približni oblik integrala*

$$I=\int_a^b e^{ixf(t)}g(t)\,dt\to\sqrt{\frac{2\pi}{x}}g(t_0)\frac{e^{i\left(xf(t_0)\pm\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{|f''(t_0)|}}\ , \tag{5.39}$$

gdje je t_0 definiran pomoću jednadžbe $f'(t_0)=0$, te vrijedi $f'(t)\neq0$ za svaki $t\neq t_0$, te $f''(t_0)\neq0$. Gornji predznak u eksponentu vrijedi za $f''(t_0)>0$, dok donji vrijedi za $f''(t_0)<0$. Konačno, gornji izraz vrijedi u granici $x\to\infty$.

Primjer 5.13. Pomoću metode stacionarne faze pronađite asimptotsku formu Besselove funkcije.

R. Integralna reprezentacija Besselove funkcije (5.25) može se napisati kao

$$J_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ix\sin\theta}e^{-im\theta}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{ix\sin\theta}e^{-im\theta}\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-ix\sin\theta}e^{im\theta}\,d\theta\ .$$

Ako označimo $f(\theta)=\sin\theta$, te $g(\theta)=e^{-im\theta}$, prvi integral možemo izračunati korištenjem (5.39). Imamo $f'(\theta)=\cos\theta$, pa je $\theta_0=\pi/2$, te $f''(\theta_0)=-1$. Slijedi

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{ix\sin\theta}e^{-im\theta}\,d\theta\to\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\,e^{-im\frac{\pi}{2}}\,e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right)}\ .$$

Drugi integral izračunamo analogno

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi e^{-ix\sin\theta}e^{im\theta}\,d\theta \to \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right)}\ ,$$

pa ukupno imamo

$$J_m(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)\ .$$

Primjer 5.14. Jednostavno matematičko njihalo mase m na početku ima duljinu l_0 i otklonjeno je za kut θ_0 od vertikale, te iz tog položaja otpušteno. Ako se duljina njihala povećava kao $l(t) = l_0 + \epsilon t$, $\epsilon > 0$, pronađi položaj njihala u bilo kojem t. Pretpostavimo da su titranja mala.

R. Diferencijalna jednadžba za matematičko njihalo glasi

$$-mg\sin\theta l = \frac{d}{dt}\left(ml^2\frac{d\theta}{dt}\right)\ .$$

Uzimajući u obzir da l ovisi o t, dobivamo

$$l\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta} + g\sin\theta\ .$$

Uz pretpostavku malih titranja $\sin\theta \approx \theta$, te uvođenjem varijable $x = l_0 + \epsilon t$, imamo

$$x^2\frac{d^2\theta}{dx^2} + 2x\frac{d\theta}{dx} + \frac{g}{\epsilon^2}\theta x = 0\ . \tag{5.40}$$

Supstitucija $\theta(x) = y(x)/\sqrt{x}$ vodi na

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-3/2}y + x^{-1/2}\frac{dy}{dx}\ .$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{3}{4}x^{-5/2}y - x^{-3/2}\frac{dy}{dx} + x^{-1/2}\frac{d^2y}{dx^2}\ .$$

Uvrštavanjem gornjih izraza, jednadžba (5.40) postaje

$$x^2\frac{d^y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{gx}{\epsilon^2}\right)y = 0\ .$$

Uz dodatnu supstituciju $z = \frac{2\sqrt{g}}{\epsilon}\sqrt{x}$ imamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2g}{\epsilon^2 z}\frac{dy}{dz}\ ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4g^2}{\epsilon^4}\frac{1}{z^2}\left(-\frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + \frac{d^2y}{dz^2}\right)\ ,$$

što daje

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (z^2-1)y = 0\ .$$

Dobili smo Besselovu diferencijalnu jednadžbu 1. vrste. Rješenje je

$$y(z) = AJ_1(z) + BN_1(z)\ ,$$

odnosno u početnim varijablama

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{l_0+\epsilon t}}\left[AJ_1\left(\frac{2\sqrt{g}}{\epsilon}\sqrt{l_0+\epsilon t}\right) + BN_1\left(\frac{2\sqrt{g}}{\epsilon}\sqrt{l_0+\epsilon t}\right)\right]\ .$$

Sad valja uzeti u obzir početne uvjete: $\theta(0)=\theta_0$, te $\dot{\theta}(0)=0$. Imamo

$$\theta(0)=\theta_0=\frac{1}{\sqrt{l_0}}\left[AJ_1\left(\frac{2\sqrt{gl_0}}{\epsilon}\right)+BN_1\left(\frac{2\sqrt{gl_0}}{\epsilon}\right)\right]\ , \tag{5.41}$$

te

$$\dot{\theta}(0)=0=-\frac{\epsilon}{2}l_0^{-3/2}(AJ_1+BN_1)+\frac{\sqrt{g}}{l_0}(AJ_1'+BN_1')\ ,$$

gdje smo radi sažetosti ispustili argumente Besselove i Neumannove funkcije, te $J_1'(x)=\frac{dJ_1}{dx}$, te slično za Neumannovu funkciju. Ako u posljednji izraz uvrstimo (5.41), imamo

$$AJ_1'+BN_1'=\frac{\epsilon}{2}\frac{\theta}{\sqrt{g}}\ ,$$

što zajedno s prvom jednadžbom

$$AJ_1+BN_1=\sqrt{l_0}\theta_0\ ,$$

čini linearni sustav za A i B. Rješenje sustava je

$$A=\frac{\Delta_A}{\Delta}\,,\qquad B=\frac{\Delta_B}{\Delta}\ ,$$

gdje je

$$\Delta_A=\theta_0\left(\frac{\epsilon}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}N_1-\sqrt{l_0}N_1'\right)\ ,$$

$$\Delta_B=\theta_0\left(\sqrt{l_0}J_1'-\frac{\epsilon}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}J_1\right)\ ,$$

$$\Delta=J_1'N_1-J_1N_1'=-\frac{\epsilon}{\pi\sqrt{gl_0}}\ ,$$

gdje smo koristili svojstvo (5.33). Korištenjem izraza (5.29) i (5.30), imamo

$$N_1'=\frac{\epsilon}{2\sqrt{gl_0}}\left(N_1-\frac{2\sqrt{gl_0}}{\epsilon}N_2\right)\ ,$$

pa je

$$A=-\theta_0\frac{\pi\sqrt{g}l_0}{\epsilon}N_2\ .$$

Na sličan način dobijemo

$$B=\theta_0\frac{\pi\sqrt{g}l_0}{\epsilon}J_2\ .$$

Ukupno rješenje je stoga

$$\theta(t)=\theta_0\frac{\sqrt{l_0}}{\sqrt{l_0+\epsilon t}}\frac{\pi\sqrt{gl_0}}{\epsilon}\Big[-N_2\left(\frac{2\sqrt{gl_0}}{\epsilon}\right)J_1\left(\frac{2\sqrt{g}}{\epsilon}\sqrt{l_0+\epsilon t}\right)$$
$$+J_2\left(\frac{2\sqrt{gl_0}}{\epsilon}\right)N_1\left(\frac{2\sqrt{g}}{\epsilon}\sqrt{l_0+\epsilon t}\right)\Big]$$

5.3 ♣ ZADACI

1. Razvijte funkcije $f(x)=x$ te $g(x)=x^2$ u red po Besselovoj funkciji $m=0,1,2$!

2. Kružnoj ploči polumjera a obod održavamo na temperaturi nula, a početna temperatura zadana je funkcijom $f(r, \phi)$. Pronađite temperaturu ploče u svakom trenutku!

3. Pronađite titranje membrane oblika kružnog vijenca (polumjeri a i b, $a > b$), ako je membrana ispuštena u titranje iz mirovanja, uz početni oblik zadan funkcijom $f(r, \phi)$.

4. Lanac duljine 1 m visi s jednog kraja. Početni pomak lanca je napravljen pomičući njegovu sredinu za 5 mm, držeći donji kraj fiksnim, iz položaja mirovanja.

   a) Koje su frekvencije prva tri normalna moda?

   b) Nacrtajte krivulje prva tri moda.

   c) Odredite gibanje lanca u.

   d) Aproksimirajte ukupno rješenje s tri člana u razvoju, te diskutirajte gibanje lanca.

5. Koristeći asimptotsku formu Besselovih funkcija pokažite da u granici $\epsilon \to 0$, rješenje zadatka 5.14 poprima oblik

$$\theta(t) \to \theta_0 \frac{l_0}{l_0 + \epsilon t} \cos(\omega_0 t)\,, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}}\,.$$

Poglavlje 6

Varijacijski račun

§ 6.1 Račun bez ograničenja

Primjer 6.1. Mjehur od sapunice razapet je između dva obruča kao na slici xx. Pronađite krivulju koja definira oblik mjehura zahtijevajući da je njegova površina minimalna.

R. Infinitezimalni djelić površine

$$dA = 2\pi y ds = 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi y\sqrt{1 + y_x^2}dx \ .$$

Zadatak je varirati slijedeći funkcional

$$A[y] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y_x^2}\, dx \ , \tag{6.1}$$

gdje tražimo funkciju $y(x)$. Rubne točke varijacije dane su s (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Korištenjem Euler-Lagrangeove jednadžbe (**??**) imamo

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y_x^2}} = c_1 \ .$$

Invertiranjem dobivamo

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2}{c_1^2} - 1} \ .$$

Integral gornje jednadžbe dan je s

$$y(x) = c_1 \mathrm{ch}\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right) \ . \tag{6.2}$$

Konstante integracije $c_{1,2}$ fiksiraju se zahtjevom da na rubovima funkcija mora zadovoljavati $y(x_{1,2}) = y_{1,2}$.

Radi ilustracije ograničavamo se na specijalan slučaj $y_1 = y_2 = 1$, te $x_1 = -x_2 = -x_0$. Tada je lako pokazati da je $c_2 = 0$. S druge strane

$$1 = c_1 \mathrm{ch}\left(\frac{x_0}{c_1}\right) \ , \tag{6.3}$$

predstavlja jednadžbu za c_1. Kako izgleda c_1 kao funkcija od x_0? Deriviranjem posljednjeg izraza po c_1 slijedi

$$1 = x_0 \mathrm{sh}\left(\frac{x_0}{c_1}\right) . \tag{6.4}$$

Numeričko rješenje sustava (6.3)-(6.4) predstavlja maksimum implicitno zadane krivulje (6.3), daje $x_0^{\max}/c_1 = 1.1997$, odnosno $c_1 = 0.5524$ te $x_0^{\max} = 0.6627$. To znači da za $x_0 < x_0^{\max}$ jednadžba (6.3) ima dva rješenja za c_1, u $x_0 = x_0^{\max}$ ima samo jedno rješenje, dok za $x_0 > x_0^{\max}$ nema rješenja. U području u kojem postoji više rješenja, fizikalno rješenje određeno je zahtjevom da je površina minimalna. Ako (6.2) ubacimo natrag u (6.1) slijedi

$$A = 4\pi \int_0^{x_0} y\sqrt{1+y_x^2}\,dx = 4\pi c_1 \int_0^{x_0} \mathrm{ch}^2\left(\frac{x_0}{c_1}\right) dx = \pi c_1^2 \left[\mathrm{sh}\left(\frac{2x_0}{c_1}\right) + \frac{2x_0}{c_1}\right] .$$

Dva rješenja fizikalno odgovaraju plitkoj i dubokoj krivulji, vidi sliku xx. Kako je duboka krivulja ona veće površine, fizikalno stanje mjehura od sapunice je uvijek plitka krivulja. Valja napomenuti da kako povećavamo udaljenost među obručima, za određeni x_0 nailazimo na tzv. **Goldschmittov diskontinuitet**, gdje je $A = 2\pi$, te nakon kojeg mjehur od sapunice pukne, vidi sliku xx.

§ 6.2 LAGRANGEOVI MULTIPLIKATORI

Primjer 6.2. Pronađite oblik homogene niti (lanca) linearne gustoće ρ i duljine l, obješene o dvije zadane točke $(-a, h_1)$ i (a, h_2) koja slobodno visi u homogenom gravitacijskom polju s akceleracijom g.

R. Potencijalna energija sustava

$$E = \int dmgy = \rho g \int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y_x^2}\,dx ,$$

je veličina koju želimo minimizirati. Ograničenje je dano s

$$l = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y_x^2}\,dx .$$

Funkcional koji se varira je dan s

$$\tilde{E} = \rho g \int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y_x^2}\,dx + \lambda\left(l - \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y_x^2}\,dx\right) ,$$

gdje smo uveli Lagrangeov multiplikator λ. Ako definiramo

$$F(y, y_x) = \rho g y\sqrt{1+y_x^2} + \lambda\sqrt{1+y_x^2} ,$$

tada Beltramijev identitet xx

$$F - y_x \frac{\partial F}{\partial y_x} = c ,$$

vodi na

$$(1+y_x^2)[\rho g y + \lambda - (\rho g y + \lambda)y_x^2] = c\sqrt{1+y_x^2} ,$$

odnosno

$$(\rho g y + \lambda)^2 = c^2(1+y_x^2) ,$$

gdje je c konstanta koju treba odrediti. Gornju jednadžbu možemo integrirati

$$\frac{1}{\rho g}\int \frac{dy}{(\frac{y^2}{c^2}-1)^{1/2}} = \int dx \ ,$$

čime je njeno rješenje

$$\frac{\rho g y + \lambda}{c} = \mathrm{ch}\left(\frac{x+k}{\frac{c}{\rho g}}\right) \ , \tag{6.5}$$

a je k nova konstanta koju valja odrediti.

U problemu trenutno imamo tri nepoznanice: c, k i λ, gdje ćemo k i λ odrediti iz rubnih uvjeta. Promotrimo specijalnu situaciju u kojoj je $h_1 = h_2 = h$. U tom slučaju lako je uvjeriti se da je $k = 0$. Lagrangeov multiplikator je tada

$$\frac{\lambda}{c} = -\frac{\rho g h}{c} + \mathrm{ch}\left(\frac{\rho g a}{c}\right) \ ,$$

što možemo staviti u (6.5) da dobijemo ukupno rješenje

$$y(x) = h + \frac{c}{\rho g}\left[\mathrm{ch}\left(\frac{\rho g x}{c}\right) - \mathrm{ch}\left(\frac{\rho g a}{c}\right)\right] \ .$$

Preostala konstanta c dobiva se iz ograničenja

$$l = \int_{-a}^{a}\sqrt{1+y_x^2}\,dx = \int_{-a}^{a}\mathrm{ch}\left(\frac{\rho g x}{c}\right)dx = \frac{2c}{\rho g}\mathrm{sh}\left(\frac{\rho g a}{c}\right) \ .$$

Napomenimo da ako je $l \geq 2a$ posljednja jednadžba nema rješenja.

Uzmimo sad $h = 0$. Za analizu, zgodno je rješenje skalirati tako da $\xi = \frac{\rho g a}{c}$, odnosno $u = x/a$

$$y(u) = \frac{a}{\xi}\left[\mathrm{ch}\,(\xi u) - \mathrm{ch}\,\xi\right] \ .$$

Uz $l = \delta a$ jednadžba ograničenja postaje

$$\mathrm{sh}\,\xi = \frac{\xi}{2}\delta \ .$$

Ako je $\delta = 2$, tada je $\xi = 0$, te je nit jednostavno ravni pravac, odnosno

$$\lim_{\xi\to 0} y(0) = 0 \ .$$

S druge strane ako je $\delta \gg 2$, imamo $\xi \to \infty$, te

$$\lim_{\xi\to\infty} y(0) = -\infty \ ,$$

odnosno nit maksimalno visi.

Primjer 6.3. Pronađite povezanu homogenu raspodjelu materije, dane ukupne mase M (ili naboja Q) takvu da je klasično gravitacijsko (ili električno) polje maksimalno u danoj točki. Ishodište bez smanjena općenitosti smjestite u zadanu točku.

R. Koristiti ćemo oznaku M za ukupnu masu objekta

$$M = \int d^3r\rho(\mathbf{r}) \ ,$$

te izraz

$$\mathbf{E} = k \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ,$$

za gravitacijsko polje $\mathbf{E}$, iako obje veličine mogu i predstavljati naboj Q, te električno polje, respektivno. Interpretacija gustoće $\rho(\mathbf{r})$ kao gustoće mase ili naboja, te specifična vrijednost konstante k razlikuje jednu od druge situacije.

Pretpostavimo da je

i) tijelo prislonjeno na točku u kojoj tražimo da je gravitacijsko polje maksimalno,

ii) oblik tijela aksijalno simetričan.

Iz drugog uvjeta vidimo da će tijelo biti prikladno izgraditi od naslaga diskova različitih polumjera, vidi sliku xx.

Slijedi da prvo računamo gravitacijsko polje diska polumjera R i neke homogene površinske raspodjele σ. Ako disk stavimo u ishodište koordinatnog sustava, te polje tražimo u nekoj točci $-z$, gdje je $z > 0$, imamo $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$, te $\mathbf{r} = (0, 0, -z)$. Gustoća diska je $\rho(\mathbf{r}') = \sigma\delta(z')\theta(R - r')$, gdje je masa diska $m = \sigma R^2\pi$. Iznos polja diska je

$$\begin{aligned} E_{\text{disk}}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} dr' r' \int_0^{2\pi} d\phi' \, \delta(z')\theta(R-r') \frac{kz\sigma}{(r'^2+z^2)^{3/2}} \\ &= 2\pi k\sigma z \int_0^R \frac{r'dr'}{(r'^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2k}{R^2} m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}}\right) . \end{aligned}$$

Ako označimo polumjer jednog diska debljine dz na udaljenosti z od ishodišta s $s(z)$, te njegove masu s dm, tada je polje jednog diska

$$dE(z) = \frac{2k}{s^2(z)} \, dm \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s^2(z)}{z^2}}}\right) .$$

Vrijedi $dm = \rho s^2 \pi dz$, gdje je ρ volumna gustoća traženog tijela, pa je po principu superpozicije polje nakupine diskova koje čine traženo tijelo

$$E(z) = 2\pi k\rho \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s^2(z)}{z^2}}}\right) dz .$$

Ovu jednadžbu shvaćamo kao funkcional $E[s]$ koji valja varirati da bi pronašli profil tijela zadan s za sad nepoznatom funkcijom $s(z)$. Ograničenje je

$$M = \int dm = \rho\pi \int_0^{\infty} s^2(z) dz .$$

Uvodimo Lagrangeov multiplikator λ da bi definirali problem bez ograničenja

6.2 ♣ ZADACI

1. U problemu 6.1 mjehura od sapunice pronađite udaljenost među obručima $2x_0$ za tzv. **Goldschmittovo rješenje** gdje je površina sapunice $A = 2\pi$ (za jedinični polumjer).

Bibliografija

[Arf05] George Arfken, *Mathematical methods for physicists*, Elsevier, Boston, 2005.

[Gam88] George Gamow, *One, two, three ... infinity*, Dover Publications, New York, 1988.

[GM78] J. D. Gray and S. A. Morris, *When is a Function that Satisfies the Cauchy-Riemann Equations Analytic?*, The American Mathematical Monthly **85** (1978), 246–256.

[Mit70] Dragoslav S. Mitrinović, *Analytic inequalities*, Springer Verlag, Berlin, 1970.

[tHV79] Gerard 't Hooft and Martinus J. G. Veltman, *Scalar One Loop Integrals*, Nucl. Phys. **B153** (1979), 365–401.

[VLA91] L. I. Volkovyskii, G. L. Lunts, and I. G. Aramanovich, *A collection of problems on complex analysis*, Dover Publications, New York, 1991.